

**WSZYSTKO,
CO TRZEBA WIEDZIEĆ!**

- czy matematyka bez geometrii jest możliwa?
- geometria a sztuka renesansu
- geometria czarnych dziur

Maciej Dunajski

GEOMETRIA

Tłumaczenie Iwona Konarzewska



ORIGINAL ENGLISH
LANGUAGE EDITION BY
OXFORD
UNIVERSITY PRESS

> KRÓTKIE
WPROWADZENIE

GEOMETRIA

> KRÓTKIE
WPROWADZENIE



WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Maciej Dunajski

GEOMETRIA

Tłumaczenie Iwona Konarzewska



ORIGINAL ENGLISH
LANGUAGE EDITION BY
OXFORD
UNIVERSITY PRESS

> KRÓTKIE
WPROWADZENIE

Łódź 2025

Tytuł oryginału: *Geometry: A Very Short Introduction*

Rada Naukowa serii *Krótkie Wprowadzenie*

*Jerzy Gajdka, Ewa Gajewska, Krystyna Kujawińska Courtney
Aneta Pawłowska, Piotr Piotrowski, Maciej Potz, Piotr Stalmaszczyk
Wojciech Woźniak*

Redaktorzy inicjujący serii *Krótkie Wprowadzenie*

Monika Borowczyk, Urszula Dzieciatkowska, Agnieszka Kałowska-Majchrowicz

Tłumaczenie

Iwona Konarzewska

Opracowanie redakcyjne

Damian Szandecki

Skład i łamanie

Munda – Maciej Torz

Korekta techniczna

Elżbieta Pich

Projekt okładki

Monika Rawska

Geometry: A Very Short Introduction was originally published in English in 2022. This translation is published by arrangement with Oxford University Press. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego is solely responsible for this translation from the original work and Oxford University Press shall have no liability for any errors, omissions or inaccuracies or ambiguities in such translation or for any losses caused by reliance thereon

© Maciej Dunajski 2022

The moral rights of the author have been asserted

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2025

© Copyright for Polish translation by Iwona Konarzewska, Łódź 2025

<https://doi.org/10.18778/8331-906-3>

Publikacja sfinansowana ze środków Wydawnictwa Uniwersytetu Łódzkiego

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

Wydanie I. W.11748.25.0.M

Ark. wyd. 5,7; ark. druk. 10,625

ISBN 978-83-8331-905-6

e-ISBN 978-83-8331-906-3

Paperback ISBN Oxford University Press ISBN 978-0-19-968368-0

Spis treści

Wstęp	7
Wstęp do wydania polskiego	9
Spis ilustracji	13
1. Czym jest geometria?	17
2. Geometria euklidesowa	23
3. Geometria nieeuklidesowa	63
4. Geometria przestrzeni zakrzywionych	83
5. Geometria rzutowa	101
6. Inne geometrie	121
7. Geometria świata fizycznego	139
Dalsze lektury	163
Indeks	165

Wstęp

Geometria ma co najmniej 2500 lat i to właśnie w ramach tej dziedziny po raz pierwszy pojawiło się pojęcie dowodu matematycznego, to jest dedukcyjnego rozumowania na podstawie zbioru aksjomatów. Geometria stanowi również bardzo aktywny obszar badawczy w matematyce, ale w ciągu kilku ostatnich dekad stopniowo zniknęła z sylabusów w szkołach wyższych w Zjednoczonym Królestwie i poza nim. Niniejsza książka stanowi próbę ożywienia tego tematu.

Przechodzę od konkretnych przykładów (obiektów matematycznych, takich jak bryły platońskie, lub twierdzeń, takich jak twierdzenie Pitagorasa) do zasad ogólnych. Zakładam niewielką wcześniejszą wiedzę matematyczną czytelnika – wystarczy poziom szkoły średniej – ale podczas czytania powinien on chcieć używać ołówka, papieru, kompasu i linijki. Geometria wyróżnia się spośród innych gałęzi matematyki tym, że dowód twierdzenia można w niej przedstawić w sposób obrazowy, bez konieczności stosowania algebry, ale jednocześnie bez uszczerbku dla formalnych rygorystycznych zasad precyzji.

Nie używałem rachunku różniczkowego i starałem się unikać zbyt dużej ilości algebry. Wyjątkiem jest rozdział 6, w którym od czasu do czasu pojawiają się macierze. Mam nadzieję, że korzyści będą duże, ponieważ czytelnik będzie w stanie docenić związki między współczesną geometrią a symetrią, ale ten rozdział nie jest konieczny do zrozumienia pozostałej części książki.

Rozdział 2 dotyczy geometrii euklidesowej i najlepiej przeczytać go przed którymkolwiek z późniejszych rozdziałów,

z których każdy koncentruje się na modyfikacji różnych postulatów Euklidesa. Rozdział 4, wprowadzający przestrzenie zakrzywione, należy przeczytać przed rozdziałem 7, w którym krzywizna pojawia się w kontekście teorii grawitacji Einsteina. Rozdział 5, pokazujący geometrię pod wieloma względami w jej najlepszym wydaniu, spodoba się każdemu, kto chce wejść w sferę geometrii z perspektywy sztuki renesansowej.

Podczas pisania tej książki korzystałem z własnych notatek do popularnych wykładów geometrii, które prowadziłem dla studentów ubiegających się o przyjęcie na Uniwersytet Cambridge. Jestem wdzięczny Nickowi Woodhouse'owi za jego wyrazy zachęty na wczesnych etapach tego projektu, Lacie Menon i Robinowi Wilsonowi za przeczytanie wcześniejszych szkiców i zasugerowanie zmian, które zaowocowały kilkoma ulepszeniami. Chciałbym również podziękować Rogerowi Penrose'owi – za podzielenie się ze mną swoim geometrycznym spojrzeniem na naukę oraz za wprowadzenie mnie w klasyczną geometrię rzutową. Przede wszystkim zaś wyrażam wdzięczność Adamowi Dunajskiemu – za uważną lekturę manuskryptu i krytyczne uwagi, a także za przygotowanie wszystkich zamieszczonych w książce rysunków.

Wstęp do wydania polskiego

Chciałbym serdecznie podziękować Wydawnictwu Uniwersytetu Łódzkiego za przetłumaczenie mojej książki na język polski i zaprezentowanie jej polskim czytelnikom. To książka o geometrii – dziedzinie matematyki, którą rozumiemy jako system twierdzeń pewnych i niezmiennych, nie zaś teorii pełnych luk i hipotez.

Zdaję sobie sprawę, że w dobie pogoni za sensacją i nieznanym nie jest to najlepszą zachętą do lektury. Ludzie pragną wiedzieć o najnowszych próbach unifikacji teorii grawitacji z mechaniką kwantową, a nawet zrozumieć matematyczne zawiłości takich prób. Interesuje ich raczej to, czego nauka nie wie, niż to, co w końcu udało nam się dobrze zrozumieć. Wykłady popularne o tytułach *Czy Wszechświat jest komputerem kwantowym?* lub *Podróże w czasie są możliwe: nowa matematyka obala teorie Einsteina* doczekają się dziesiątek tysięcy kliknięć w internecie. Wykład *Jak Ziemia porusza się w polu grawitacyjnym Słońca?* będzie zapewne mniej chwytny. Dwa pierwsze wykłady będą składać się w najlepszym razie ze spekulacji, których nie-specjaliści nie będą w stanie odróżnić od rzetelnej wiedzy, natomiast trzeci, o ile wykładowca się do niego przyłoży, pokaże triumf myśli ludzkiej najwyższego kalibru: setki lat obserwacji astronomicznych połączonych z postępem w matematyce, które doprowadziły Keplera i Newtona do geometrycznej teorii trajektorii eliptycznych, a potem Einsteina do jej subtelnej i jeszcze bardziej geometrycznej modyfikacji, przepięknej matematycznie i potwierdzonej empirycznie.

Moim celem w tej książce jest próba zainteresowania Państwa tym, co wiemy o geometrii. Tu i tam wspominam również o tym, czego nie wiemy – to tak zwane *problemy otwarte* – ale staram się opierać na solidnych podstawach, w ramach których można przynajmniej ściśle sformułować tego rodzaju problemy. Jest to szczególnie widoczne w rozdziale 7, gdzie przedstawiam zagadnienie czarnych dziur w geometrycznym ujęciu teorii grawitacji Einsteina.

Moje zadanie jest tym trudniejsze, że geometria nie jest naszą narodową specjalnością. Lwowska szkoła matematyczna skupiona w latach międzywojennych wokół wybitnego polskiego matematyka Stefana Banacha zajmowała się analizą funkcjonalną. Współczesne podręczniki z tej dziedziny, które polecam moim studentom w Cambridge, pełne są twierdzeń nazwanych polskimi imionami. Szkoła warszawska, której liderami byli między innymi Waław Sierpiński i Kazimierz Kuratowski, prowadziła badania w zakresie logiki i tego, co dzisiaj zwykło się określać podstawami matematyki. Możemy być niezmiernie dumni z polskich osiągnięć w tej dziedzinie. To tło historyczne miało wpływ na programy nauczania matematyki w szkołach podstawowych i średnich. Mój rocznik (matura w 1990 roku w łódzkim Liceum im. Mikołaja Kopernika – Kopernik to może najbardziej znany polski geometra) był faszerowany teorią zbiorów i podstawami matematyki od pierwszej klasy szkoły podstawowej – to zapewne wpływ szkoły warszawskiej. Później uczyliśmy się znienawidzonych granic ciągów, „epsilonów i delt”, a także tak zwanych tasiemców (to upraszczanie skomplikowanych wyrażeń algebraicznych). Moja żona twierdzi, że tylko dzięki opanowaniu tasiemców dostała się do liceum. To wstęp do analizy, a zatem wpływ szkoły lwowskiej. Czy ktoś z Państwa pamięta naukę metod obliczania objętości ostrosłupa? Albo przepięknych twierdzeń o trójkątach opisanych na okręgu? Ja nie. Taka staromodna matematyka nie była i nie jest w modzie.

Zapraszam więc Państwa do studiów własności kwadratów, okręgów i trójkątów, ale też bardziej egzotycznych kształtów, takich jak aperiodyczny parkietaż Penrose’a. W dalszych

rozdziałach zerwiemy z aksjomatami Euklidesa, co da nam szansę zrozumieć geometrię hiperboliczną, a także geometryczne podstawy perspektywy. To fascynujące i elementarne dziedziny geometrii, o których nie uczyliśmy się w szkole, mimo że ich zrozumienie nie wymaga żadnych wzorów lub operacji algebraicznych. Jeszcze bardziej fascynujące jest to, że geometria to klucz do zrozumienia najdziwniejszych obiektów we Wszechświecie: czarnych dziur, a być może też ukrytych w nich osobliwości. Mam nadzieję, że ta książka pozwoli Państwu dostrzec piękno tej dziedziny matematyki.

Maciej Dunajski
Tulum, wrzesień 2025

Spis ilustracji

1. Twierdzenie Pitagorasa	18
2. Dowód twierdzenia Pitagorasa	18
3. <i>Granica okręgu IV</i> (M. C. Escher). Model geometrii hiperbolicznej M. C. Escher's "Circle Limit IV" © 2021 The M. C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com	19
4. <i>Ostatnia Wieczerza</i> . Wszystkie linie równoległe przecinają się w jednym punkcie Leonardo da Vinci / Wikipedia	21
5. Twierdzenie Brianchona	21
6. π nie jest równe 3	24
7. Piąty aksjomat Euklidesa	26
8. Aksjomat równoległości	26
9. Kąty przeciwległe	27
10. Podział kąta na połowy	28
11. Podział odcinka na trzy równe części	29
12. Dwa przystające wielokąty powiązane sekwencją przekształceń izometrycznych: odbicie względem linii l , obrót wokół punktu O i przesunięcie	32
13. Metryka „British Rail”	33
14. Wielokąt wypukły i nie-wypukły (wklęsły)	38
15. Suma kątów w trójkącie	39
16. Podział n -kąta	39
17. Heksagonalna struktura plastra miodu Grzecznościowo: Dr Daniel Twitchen	40

18. Kafelkowanie płaszczyzny	41
19. Aperiodyczne kafelki Penrose'a oraz ich reguły dopasowania	42
20. Pięć brył platońskich	44
21. Obliczenie pola trójkąta	48
22. Wiedźma Agnesi	51
23. Współrzędne kartezjańskie punktu	52
24. Dodawanie wektorów	56
25. Rozwiązanie problemu Sylwestera	59
26. Liczba chromatyczna płaszczyzny jest równa co najwyżej 7	61
27. Wielki okrąg	63
28. Trójkąt sferyczny	65
29. Odwzorowanie Mercatora	67
30. Luna sferyczna	68
31. Linie hiperboliczne	70
32. Konstrukcja linii hiperbolicznej	70
33. Nieskończenie wiele linii równoległych	71
34. Odległość hiperboliczna	71
35. Odległości hiperboliczna i euklidesowa od środka dysku	73
36. <i>Granica okręgu IV</i> (M. C. Escher)	74
M. C. Escher's "Circle Limit IV"	
© 2021 The M.C. Escher Company-The Netherlands.	
All rights reserved. www.mcescher.com	
37. Trójkąt hiperboliczny	75
38. Kafelkowanie za pomocą trójkątów idealnych	76
39. Kafelkowanie za pomocą regularnych siedmiokątów	77
40. Traktrysa i pseudosfera	79
41. Model Beltramiego	80

42. Zewnętrzna krzywizna krzywej	84
43. Okrąg osculacyjny (krzywiznowy)	85
44. Krzywizna paraboli $y = x^2$ wynosi $\kappa = 2(1 + 4x^2)^{-3/2}$	86
45. Krojenie powierzchni	87
46. Krzywizna Gaussa	87
47. Powierzchnia o genusie 3	91
48. Rzutowanie stereograficzne. Dwa punkty: P i Q , znajdują się blisko siebie na sferze, ale ich obrazy, P' i Q' , są daleko od siebie na płaszczyźnie	93
49. Wektor styczny na płaszczyźnie stycznej	95
50. Długość krzywej	96
51. (a) Duccio di Buoninsegna (ok. 1310), <i>Pojmanie Jezusa</i> Duccio di Buoninsegna / Wikipedia	
(b) Canaletto (ok. 1730), <i>Dziedziniec wewnętrzny Pałacu Dożów</i> © Fitzwilliam Museum / Bridgeman Images	102
52. Maszyna perspektywiczna z <i>Podręcznika malarza</i> Albrechta Dürera (1525) Bridgeman Images	103
53. Rzut linii prostej na linię prostą	104
54. Rzut z płaszczyzny na płaszczyznę	105
55. Twierdzenie Desarguesa	106
56. Punkty i linie proste na płaszczyźnie rzutowej	108
57. Przekroje stożkowe	111
58. „Kozia” definicja elipsy	111
59. Twierdzenie Pascala	113
60. Twierdzenie Ponceleta	114
61. Dualność rzutowa	116
62. Dualność względem krzywej stożkowej	117

63. Twierdzenie Briachona jest dualne względem twierdzenia Pascala	118
64. Twierdzenie Cevy	124
65. Transformacje kwadratu w różnych geometriach	129
66. Dwie czwórki punktów o takich samych ilorazach krzyżowych są powiązane przez transformację rzutową	131
67. Krzywe Fermata dla $n = 2, 3$ i 4	133
68. Wymierna parametryzacja okręgu	134
69. Stożek świetlny w czasoprzestrzeni	141
70. Linie geodezyjne są najdłuższymi ścieżkami	143
71. Równoczesność nie jest absolutna	144
72. Odległość w czasoprzestrzeni arystotelesowskiej i galileuszowskiej	148
73. Materia zakrzywiająca czasoprzestrzeń	151
74. Czarna dziura z przerywanymi pionowymi liniami przedstawiającymi horyzont zdarzeń	154
75. Grawitacyjne zapadanie się gwiazdy, w wyniku którego powstaje czarna dziura	156

Rozdział 1

Czym jest geometria?

W VI wieku p.n.e. grecki filozof Pitagoras z Samos i jego zwolennicy, pitagorejczycy, spędzali czas na odkrywaniu związków między liczbami a formami geometrycznymi. Przypisuje się im udowodnienie tego, co obecnie znane jest jako twierdzenie Pitagorasa: dla dowolnego trójkąta prostokątnego kwadrat przeciwprostokątnej c jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków a i b (rysunek 1).

Twierdzenie Pitagorasa stanowi wynik w *geometrii* – termin ten pochodzi od starożytnych greckich słów: *geo*, ‘ziemia’, i *metron*, ‘miara’ – gałęzi matematyki zajmującej się długościami, kształtami i powierzchniami. Geometria wyróżnia się spośród większości innych dziedzin matematyki tym, że dowód twierdzenia można przedstawić w sposób obrazowy, bez potrzeby stosowania algebry lub symboli matematycznych, ale jednocześnie bez uszczerbku dla precyzji (rysunek 2).

Chociaż przekonanie, że wszystkie trójkąty w lewym kwadracie można przekształcić w trójkąty w prawym kwadracie, może wymagać pewnych wyjaśnień, dowód jest zasadniczo samowystarczalny. Rzeczywiście, koncepcja dowodu matematycznego – rozumowania dedukcyjnego wyprowadzonego z zestawu *aksjomatów* – po raz pierwszy pojawiła się właśnie w geometrii. Aksjomaty to stwierdzenia, które są ewidentnie prawdziwe. Po raz pierwszy zostały one wymienione przez innego greckiego matematyka, Euklidesa, w jego *Elementach* – prawdopodobnie najbardziej wpływowym zbiorze książek matematycznych, jakie kiedykolwiek napisano.