

Hybrydowe modelowanie procesów demograficznych z wykorzystaniem rozmytych przełączających układów dynamicznych

Agnieszka Rossa
Lesław Socha
Andrzej Szymański



**Hybrydowe modelowanie
procesów demograficznych
z wykorzystaniem
rozmytych przełączających
układów dynamicznych**



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

Hybrydowe modelowanie procesów demograficznych z wykorzystaniem rozmytych przełączających układów dynamicznych

**Agnieszka Rossa
Lesław Socha
Andrzej Szymański**



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2015

Agnieszka Rossa, Andrzej Szymański – Uniwersytet Łódzki
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Zakład Demografii i Gerontologii Społecznej
90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1095 r. nr 41/43

Lesław Socha – Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy – Szkoła Nauk Ścisłych, Instytut Informatyki
01-938 Warszawa, ul. Wóycickiego 1/3

RECENZENT

Grażyna Trzpiot

REDAKTOR INICJUJĄCY

Iwona Gos

REDAKTOR WYDAWNICTWA UŁ

Bogusław Pielat

SKŁAD I ŁAMANIE

Agnieszka Rossa

KOREKTA TECHNICZNA

Leonora Wojciechowska

PROJEKT OKŁADKI

Stämpfli Polska Sp. z o.o.

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Shutterstock.com

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ

© Copyright by Authors, Łódź 2015

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2015

Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 (CC BY-NC-ND)

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

Wydanie I. W.07151.15.0.K

Ark. wyd. 11,8; ark. druk. 14,75

ISBN 978-83-8088-041-2

e-ISBN 978-83-8088-042-9

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

90-131 Łódź, ul. Lindleya 8

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl

e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl

tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Wstęp	7
Rozdział 1. Modele umieralności	11
1.1. Wprowadzenie	11
1.2. Podstawowe tablicowe mierniki umieralności	11
1.3. Związek kohortowych współczynników zgonów i prawdopodobieństw zgonów	12
1.4. Modele interpolacyjne	13
1.4.1. Model interpolacji liniowej	14
1.4.2. Model interpolacji wykładniczej	15
1.5. Inne tablicowe mierniki umieralności	18
1.6. Związek kohortowych współczynników zgonów i natężenia zgonów	18
1.7. Prawa umieralności	22
1.8. Wybrane modele umieralności	25
1.8.1. Model Lee–Cartera	26
1.8.2. Modyfikacje i uogólnienia modelu Lee–Cartera	31
1.8.3. Model rozmyty Koissi–Shapiro	36
1.8.4. Wybrane dynamiczne modele umieralności – model Vasička i Coxa–Ingersolla–Rossa	37
1.8.5. Dynamiczny model umieralności Lee–Cartera	38
1.8.6. Model Milevskiego–Promisłowa i model Giacometti	41
1.8.7. Uogólniony model Milevskiego–Promisłowa z wektorem, liniowym filtrem	43
1.9. Uwagi końcowe	43
Rozdział 2. Statyczne i dynamiczne modele hybrydowe	45
2.1. Statyczne modele hybrydowe	45
2.2. Dynamiczne modele hybrydowe	47
2.3. Momentowe modele hybrydowe	53
2.4. Uwagi końcowe	60
Rozdział 3. Dynamiczne, hybrydowe modele umieralności	61
3.1. Wprowadzenie	61
3.2. Skalarny, hybrydowy model Vasička	62

3.3.	Skalarny, hybrydowy model Coxa–Ingersolla–Rossa	62
3.4.	Skalarny, hybrydowy model Lee–Cartera	63
3.5.	Uogólniony, skalarny, hybrydowy model Lee–Cartera	64
3.6.	Uogólnione, hybrydowe modele Milevskiego–Promisłowa	66
3.6.1.	Model ze skalarnym, liniowym filtrem	66
3.6.2.	Model z wektorowym, liniowym filtrem	69
3.6.3.	Model z liniowymi, skalarnymi filtrami	77
3.6.4.	Model z niezależnymi, liniowymi, skalarnymi filtrami	79
3.7.	Dyskretno-czasowe reprezentacje modeli hybrydowych	82
3.7.1.	Uogólniony, skalarny, hybrydowy model Lee–Cartera	82
3.7.2.	Uogólnione, hybrydowe modele Milevskiego–Promisłowa	82
3.7.3.	Dyskretno-czasowa reprezentacja układu równań momentów dla uogólnionych, hybrydowych modeli Milevskiego–Promisłowa	85
3.8.	Estymacja parametrów hybrydowych modeli umieralności	87
3.8.1.	Estymacja parametrów hybrydowego modelu Lee–Cartera	87
3.8.2.	Estymacja parametrów uogólnionego, hybrydowego modelu Milevskiego–Promisłowa	88
3.9.	Uwagi końcowe	90

Rozdział 4. Model Koissi–Shapiro oparty

na skierowanych liczbach rozmytych	91
4.1. Wprowadzenie	91
4.2. Algebra skierowanych liczb rozmytych OFN	92
4.3. Model umieralności typu Koissi–Shapiro	103
4.4. Przełącznikowa fazyfikacja macierzy obserwacji	105
4.4.1. Metoda fazyfikacji obserwacji	105
4.4.2. Wykrywanie punktów przełączenia	108
4.4.3. Podstawy teoretyczne testu JL	112
4.4.4. Poszukiwanie punktu przełączenia funkcji trendu	113
4.5. Estymacja parametrów modelu Koissi–Shapiro	122
4.6. Uwagi końcowe	124

Rozdział 5. Modele umieralności oparte na zmodyfikowanych liczbach rozmytych i funkcjach zespolonych

5.1.	Wprowadzenie	125
5.2.	Model umieralności oparty na algebrze zmodyfikowanych liczb rozmytych	125
5.2.1.	Estymacja parametrów modelu	128
5.3.	Model umieralności oparty na funkcjach zespolonych	131
5.3.1.	Estymacja parametrów modelu	134
5.4.	Kwaternionowy model umieralności	135
5.4.1.	Estymacja parametrów modelu	139
5.5.	Uwagi końcowe	143

Rozdział 6. Estymacja i ewaluacja modeli umieralności	145
6.1. Wprowadzenie	145
6.2. Wyniki estymacji dynamicznego, hybrydowego modelu Lee–Cartera	147
6.3. Wyniki estymacji hybrydowego modelu Milevskiego–Promisłowa	152
6.4. Wyniki estymacji modelu umieralności opartego na zmodyfikowanych liczbach rozmytych	161
6.5. Wyniki estymacji modelu kwaternionowego	167
6.6. Uwagi końcowe	172
Dodatek A. Elementy analizy procesów stochastycznych i równania stochastyczne	175
A.1. Podstawowe definicje procesów stochastycznych	175
A.1.1. Procesy drugiego rzędu	177
A.1.2. Procesy stacjonarne	179
A.1.3. Procesy gaussowskie	179
A.1.4. Procesy Markowa	180
A.1.5. Procesy o przyrostach niezależnych	182
A.1.6. Biały szum	184
A.2. Rachunek różniczkowy i całkowy procesów stochastycznych	186
A.2.1. Całkowanie oraz różniczkowanie w sensie średnio- kwadratowym	186
A.2.2. Całki stochastyczne względem procesów dyfuzyjnych	187
A.2.3. Formuła Itô dla procesów dyfuzyjnych	190
A.2.4. Stochastyczne równania różniczkowe Itô i Stratonowicza dla procesów dyfuzyjnych	191
A.3. Równania momentów w liniowych, stochastycznych układach dynamicznych	196
A.3.1. Układy liniowe z addytywnymi wymuszeniami	196
A.3.2. Układy liniowe z addytywnymi i parametrycznymi wymuszeniami	198
A.4. Metody dyskretyzacji stochastycznych równań różniczkowych	201
Dodatek B. Elementy algebry zmodyfikowanych liczb rozmytych i zespolonych	203
B.1. Zmodyfikowane liczby rozmyte	203
B.2. Liczby i funkcje zespolone	209
B.2.1. Algebra Banacha C^*	210
B.2.2. Algebra Banacha $C(\mathcal{T})$	210
B.2.3. Przestrzeń kwaternionów	216
Bibliografia	227

Wstęp

Umieralność i prawidłowości z nią związane są przedmiotem dociekań od wielu stuleci. Już z początku III wieku pochodzi tzw. tablica Ulpiana, opracowana dla celów fiskalnych przez rzymskiego prawnika Dominatiusa Ulpianusa. Tablica przedstawia wartości dalszego trwania życia obywateli Imperium Rzymskiego. Przekazy historyczne nie zawierają wzmianki o zastosowanej metodzie obliczeń i materiałach źródłowych, dlatego tablica Ulpiana ma głównie wartość historyczną (por. [93], s. 102–103).

Za ojca metodologii tablic wymieralności uznaje się J. Graunta, który w roku 1662 opublikował pracę *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Przedstawił w niej porządek wymierania generacji mieszkańców Londynu w formie liczb osób dożywających wieku 6, 16, 26, ..., 86 lat. Graunt oparł swoje analizy na rejestrach londyńskich parafii, nie precyzując jednak, jakiego okresu dotyczyły.

Kontynuatorem badań Graunta był angielski astronom E. Halley, który w artykule z roku 1693 *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind Draws from Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw* przedstawił tablice wymieralności dla populacji mieszkańców Wrocławia. Inne, wczesne prace na temat modeli umieralności pochodzą z wieku XIX (np. [40], [106]).

Autorem współczesnej metodologii budowy tablic wymieralności jest C. L. Chiang [25]. Obecnie tablice tego rodzaju określa się także mianem tablic trwania życia (*life tables*). W Polsce wspomnianego terminu zaczęto używać w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku.

Gwałtowny rozwój teorii i zastosowań modeli umieralności obserwujemy szczególnie w ostatnich czterech dekadach, o czym świadczą liczne opracowania monograficzne poruszające tę tematykę (np. [36], [38], [48], [57], [77], [91], [93], [105], [107]).

Opisywane w literaturze matematyczne modele umieralności można podzielić na dwie grupy [14], tj. na modele statyczne lub stacjonarne oraz modele dynamiczne. Pierwszą, najliczniejszą grupę stanowią modele, w których prawdopodobieństwa zgonów lub cząstkowe współczynniki

zgonów są przedstawiane za pomocą funkcji zmiennej rzeczywistej lub zmiennej rozmytej z pewnymi, estymowanymi parametrami ([20], [21], [23], [24], [31], [41], [42], [43], [47], [59], [65], [88], [89], [90]). Drugą grupę tworzą modele dynamiczne, w których prawdopodobieństwa lub współczynniki zgonów wyrażane są m.in. w postaci rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych ([2], [9], [11], [13], [16], [17], [26], [27], [30], [37], [44], [45], [54], [69], [82], [92], [94], [96], [104], [112]). Popularny obecnie model Lee–Cartera [65], podobnie jak jego rozmyta wersja Koissi–Shapiro [59], należą do pierwszej grupy. Jednak niektóre uogólnienia modelu Lee–Cartera można zaliczyć również do grupy drugiej. Przykładem jest dynamiczny, hybrydowy model typu Lee–Cartera, zaproponowany w pracy A. Rossy i L. Sochy [92].

Modele dynamiczne opisane stochastycznymi równaniami różniczkowymi okazały się niewystarczające do opisu procesów demograficznych. Nie nadawały się one zwłaszcza do opisu zjawisk zmiennych w czasie ciągłym, z uwagi na odmienne zachowanie w różnych przedziałach czasowych. To skłoniło naukowców do zaproponowania nowego rodzaju modeli, zwanych hybrydowymi, w których występuje wzajemna interakcja między ciągłą i dyskretną dynamiką.

Wprowadzone modele hybrydowe lub przełączające [15] były uogólnieniem modeli z przełącznikami, występujących w automatyce oraz modeli o zmiennej strukturze [56] opisujących zjawiska w mechanice, ekonomii lub w naukach empirycznych. Pojawiły się również prace, w których autorzy wprowadzili złożone modele, które można uznać za modele hybrydowe (np. [12], [13], [44], [92]).

W dalszych rozważaniach przez układ hybrydowy będziemy rozumieli pewną rodzinę modeli statycznych lub dynamicznych, które będą przełączane według jakiegoś prawa przełączeń. Dynamiczne modele będą opisane stochastycznymi równaniami różniczkowymi. Z uwagi na to, że tylko dla niewielkiej klasy równań można znaleźć ich rozwiązania analityczne i mają one dosyć złożoną budowę, proponujemy nową grupę modeli hybrydowych, zwanych momentowymi układami hybrydowymi. Idea tych modeli polega na zastąpieniu równań stochastycznych odpowiadającymi im równaniami różniczkowymi dla momentów.

Główną trudnością związaną z zastosowaniem popularnego obecnie stochastycznego modelu Lee–Cartera jest założenie o jednorodności składnika losowego, którego zwykle nie potwierdzają wyniki analiz empirycznych. Trudność ta skłania do poszukiwania rozwiązań, uchylających wspomniane założenie. Jedną z możliwości jest przeniesienie rozważań na grunt teorii liczb rozmytych.

Próbie taką podjęli M. C. Koissi i A. F. Shapiro [59], proponując tzw. rozmyty model Lee–Cartera. W ich modelu zarówno obserwacje empiryczne, jak i parametry modelu traktowane są w kategoriach liczb rozmytych, opisanych trójkątnymi, symetrycznymi funkcjami przynależności.

Model Koissi–Shapiro niesie jednak ze sobą trudności związane z estymacją parametrów, które wynikają z konieczności poszukiwania minimum funkcji zawierającej operator typu *maksimum*. Tego rodzaju zadania nie można rozwiązać za pomocą standardowych algorytmów optymalizacyjnych. Problem ten można jednak uprościć, wykorzystując algebrę skierowanych liczb rozmytych, opracowaną i opublikowaną przez W. Kosińskiego z zespołem [61], [62]. Efekty jej zastosowania w odniesieniu do modelu Koissi–Shapiro opublikowane zostały w monografii zbiorowej pod redakcją A. Rossy [91], a także w artykule A. Szymańskiego i A. Rossy [104].

Dalej idąca modyfikacja umożliwia zastąpienie algebry Banacha skierowanych liczb rozmytych przez algebrę Banacha C^* . Jej wykorzystanie pozwala odwołać się do twierdzenia Gelfanda–Mazura, wskazującego na izomorfizm izometryczny pomiędzy algebrą C^* a algebrą Banacha funkcji zespolonych. W ten sposób problem optymalizacyjny może być przeniesiony na teren analizy zespolonej. Jest to według naszej najlepszej wiedzy nowatorskim podejściem do zagadnienia modelowania umieralności.

Struktura książki jest następująca. W rozdziale 1 zostały omówione podstawowe pojęcia i modele umieralności, zaczerpnięte z literatury. Rozdział 2 stanowi wprowadzenie w tematykę hybrydowych modeli dynamicznych. W rozdziale 3 przedstawione zostały dynamiczne, hybrydowe modele umieralności, w szczególności hybrydowy model Lee–Cartera oraz uogólniony model Milevskiego–Promislowa oraz ich wersje dyskretno-czasowe, służące do estymacji parametrów. W rozdziale 4 prezentowane są teoretyczne podstawy rozmytych modeli umieralności na gruncie algebry skierowanych liczb rozmytych, natomiast rozdział 5 zawiera kilka propozycji modeli umieralności będących uogólnieniem modelu rozmytego. Oparte są one na algebrze zmodyfikowanych liczb rozmytych oraz funkcji zespolonych. W ostatnim rozdziale zawarte zostały rezultaty estymacji i ewaluacji zaproponowanych modeli.

Autorzy dziękują prof. Grażynie Trzpiot za cenne uwagi i sugestie zawarte w recenzji wydawniczej niniejszej monografii. Książka skierowana jest do studentów, doktorantów i specjalistów z zakresu demografii, statystyki i ekonomii.

Publikacja została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2011/01/B/HS4/02882.

Rozdział 1

Modele umieralności

1.1. Wprowadzenie

Uznaje się, że umieralność jest relatywnie łatwa do modelowania i prognozowania. Jednak w długim horyzoncie prognozy, pod wpływem różnorodnych zaburzeń, mogą zachodzić nieregularne zmiany w przebiegu tego procesu. Przykładem może być kryzys zdrowotny w Polsce w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego stulecia ([78]). Kluczową rolę odgrywa wówczas dobór adekwatnego modelu. Przedmiotem modelowania są zazwyczaj tablicowe mierniki umieralności, do których należą głównie cząstkowe współczynniki zgonów lub warunkowe prawdopodobieństwa zgonów. Na ich podstawie dokonuje się prognozowania innych wielkości, np. średniego czasu dalszego trwania życia.

1.2. Podstawowe tablicowe mierniki umieralności

Definicja cząstkowych (grupowych) współczynników zgonów odwołuje się do ogólnej definicji współczynnika demograficznego, rozumianego jako iloraz liczby zdarzeń demograficznych określonego rodzaju do łącznego czasu ekspozycji na ryzyko wystąpienia zdarzenia w rzeczywistej lub hipotetycznej kohorcie ([85], s. 5–32). Dalej przedstawiona zostanie definicja cząstkowych, kohortowych współczynników demograficznych, wyznaczanych dla ustalonej kohorty (generacji) osób. Definicje kohortowo-przekrojowych lub przekrojowych współczynników demograficznych znaleźć można w monografii [91], s. 229–231.

Założmy, że rozważamy pewną podzbiorowość jednostek, wyodrębnionych w danej kohorcie s . Oznaczmy tę podzbiorowość symbolem x . Zwykle indeks x wskazuje na podpopulację jednostek (osób) wyodrębnionych ze względu na wiek, a dokładniej – będących w wieku x ukończonych lat. W takim przypadku x przybiera wartości ze zbioru $\{0, 1, \dots, X\}$, gdzie X jest górną granicą wieku.

Kohortowy, cząstkowy współczynnik demograficzny dla osób w wieku x w kohorcie s można oznaczyć symbolem $W_x^{(s)}$. W ogólnym przypadku, tj. dla grupy wieku $[x, x + n)$ ($n > 1, n \in \mathbf{N}$), bardziej adekwatnym jest oznaczenie ${}_nW_x^{(s)}$.

Definicja 1.1. Cząstkowym, kohortowym współczynnikiem demograficznym nazywamy iloraz liczby zdarzeń demograficznych $Z_x^{(s)}$ w x -tej podzbiorowości w kohorcie s , do łącznego czasu ekspozycji $K_x^{(s)}$ na ryzyko wystąpienia danego zdarzenia w tej podzbiorowości, czyli

$$W_x^{(s)} = \frac{Z_x^{(s)}}{K_x^{(s)}} C, \quad (1.2.1)$$

gdzie C oznacza daną stałą (np. $C = 10\,000$).

Gdy analizowanymi zdarzeniami demograficznymi są zgony, wówczas lewą stronę (1.2.1) zwykło się oznaczać symbolem $m_x^{(s)}$, gdy $n = 1$ lub symbolem ${}_nm_x^{(s)}$, gdy $n > 1$.

Ważnymi miernikami w analizie demograficznej, poza współczynnikami cząstkowymi, są prawdopodobieństwa warunkowe.

Definicja 1.2. Warunkowe, kohortowe prawdopodobieństwo zdarzeń demograficznych jest ilorazem liczby zdarzeń $Z_x^{(s)}$ zaobserwowanych w s -tej kohorcie osób będących w wieku x ukończonych lat, do liczby $L_x^{(s)}$ osób dożywających wieku x , czyli

$$q_x^{(s)} = \frac{Z_x^{(s)}}{L_x^{(s)}}. \quad (1.2.2)$$

W przypadku, gdy rozważamy przedział wieku $[x, x + n)$, dla $n > 1$, wówczas warunkowe, kohortowe prawdopodobieństwo zdarzeń demograficznych oznaczamy symbolem ${}_nq_x^{(s)}$. Dalej, dla uproszczenia notacji, pominięty zostanie symbol (s) , oznaczający kohortę.

1.3. Związek kohortowych współczynników zgonów i prawdopodobieństw zgonów

Niech ${}_nZ_x$ oraz ${}_nK_x$ oznaczają odpowiednio liczbę zgonów i czas ekspozycji na ryzyko zgonu w danej kohorcie osób, będących w grupie wieku $[x, x + n)$ lat.

Niech ${}_na_x$ będzie średnim czasem życia osób należących do tej grupy, które nie dożyły $(x+n)$ -tych urodzin. Ponadto, niech L_x oznacza liczbę dożywających wieku x ukończonych lat w badanej kohorcie. Wymienione wielkości łączą następujące relacje

$${}_nK_x = nL_x - n_nZ_x + {}_na_x{}_nZ_x \quad (1.3.1)$$

oraz

$${}_nK_x = nL_{x+n} + {}_na_x{}_nZ_x. \quad (1.3.2)$$

Ponadto, mamy

$$L_x = L_{x+n} + {}_nZ_x. \quad (1.3.3)$$

Na podstawie (1.3.1) otrzymujemy

$$L_x = \frac{{}_nK_x}{n} + {}_nZ_x - \frac{{}_nZ_x{}_na_x}{n} = \frac{{}_nK_x + (n - {}_na_x){}_nZ_x}{n},$$

stąd

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nZ_x}{L_x} = \frac{{}_n{}_nZ_x}{{}_nK_x + (n - {}_na_x){}_nZ_x} = \\ &= \frac{n \frac{{}_nZ_x}{{}_nK_x}}{\frac{{}_nK_x}{{}_nK_x} + (n - {}_na_x) \frac{{}_nZ_x}{{}_nK_x}} = \frac{n{}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x){}_nm_x}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$${}_nq_x = \frac{n{}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x){}_nm_x}. \quad (1.3.4)$$

Wzór (1.3.4) przedstawia relację pomiędzy kohortowym współczynnikiem zgonów ${}_nm_x$ a prawdopodobieństwem zgonów ${}_nq_x$. W przypadku szczególnym, gdy $n = 1$, mamy z (1.3.4)

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 - a_x)m_x}. \quad (1.3.5)$$

1.4. Modele interpolacyjne

Niech L_{x+y} dla $y \in [0, n]$ oznacza liczbę dożywających wieku $x+y$ lat. Liczbę L_{x+y} traktować będziemy jako ciągłą funkcję zmiennej $y \in [0, n]$. Zakładać będziemy dalej liniową bądź wykładniczą postać tej funkcji.

1.4.1. Model interpolacji liniowej

Założmy, że L_{x+y} dla ustalonego x jest liniową funkcją zmiennej y , czyli

$$L_{x+y} = a + by \quad \text{dla } y \in [0, n]. \quad (1.4.1)$$

Parametry tej funkcji określamy w taki sposób, aby funkcja przyjmowała zadaną wartość L_x dla $y = 0$ oraz L_{x+n} dla $y = n$. Warunki te możemy zapisać następująco

$$L_x = a \text{ dla } y = 0, \quad L_{x+n} = a + bn \text{ dla } y = n. \quad (1.4.2)$$

Z przedstawionych warunków wynika, że

$$a = L_x, \quad b = \frac{L_{x+n} - L_x}{n} = -\frac{{}_nZ_x}{n}, \quad (1.4.3)$$

gdzie ${}_nZ_x$ jest liczbą zgonów w przedziale wieku $[x, x+n]$.

W rezultacie, (1.4.1) możemy zapisać wzorem

$$L_{x+y} = a + by = L_x - \frac{{}_nZ_x}{n}y. \quad (1.4.4)$$

Obliczymy teraz czas ekspozycji ${}_nK_x$ na ryzyko zgonu w przedziale $[x, x+n]$. Gdy L_{x+n} jest funkcją całkowalną na przedziale $[0, n]$, wówczas czas ekspozycji ${}_nK_x$ oblicza się jako całkę oznaczoną z tej funkcji. W tym przypadku funkcja L_{x+y} jest całkowalna, ponieważ ma postać (1.4.1). Mamy zatem

$$\begin{aligned} {}_nK_x &= \int_0^n L_{x+y} dy = \int_0^n \left(L_x - \frac{{}_nZ_x}{n}y \right) dy = \\ &= nL_x - \frac{{}_nZ_x}{n} \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^n = nL_x - \frac{n}{2} {}_nZ_x. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Ponieważ L_x, L_{x+n} łączy relacja (1.3.3), więc otrzymujemy

$${}_nK_x = nL_{x+n} + \frac{n}{2} {}_nZ_x. \quad (1.4.6)$$

Z porównania otrzymanego wyniku z ogólnym wyrażeniem (1.3.2), definiującym czas ekspozycji

$${}_nK_x = nL_{x+n} + {}_na_x {}_nZ_x, \quad (1.4.7)$$

wnioskujemy ostatecznie, że współczynnik ${}_na_x$ równy jest

$${}_na_x = \frac{n}{2}. \quad (1.4.8)$$

W modelu interpolacji liniowej formuła (1.3.4), definiująca relację pomiędzy prawdopodobieństwem ${}_nq_x$ oraz cząstkowym współczynnikiem zgonów ${}_nm_x$, sprowadza się do postaci

$${}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{1 + (n - \frac{n}{2}){}_nm_x} = \frac{2{}_nm_x}{2 + n{}_nm_x}. \quad (1.4.9)$$

W szczególnym przypadku, gdy $n = 1$, otrzymujemy

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 - \frac{1}{2})m_x} = \frac{2m_x}{2 + m_x}. \quad (1.4.10)$$

1.4.2. Model interpolacji wykładniczej

Przyjmijmy teraz, że L_{x+y} dla $y \in [0, n]$ jest funkcją wykładniczą zmiennej y , określoną wzorem

$$L_{x+y} = ab^y, \quad y \in [0, n], \quad (1.4.11)$$

przy warunkach ograniczających

$$L_x = a \quad \text{dla } y = 0, \quad (1.4.12)$$

$$L_{x+n} = ab^n \quad \text{dla } y = n,$$

przy czym L_x oraz L_{x+n} są zadane z góry.

Z powyższych warunków wynika, że

$$a = L_x, \quad b = \left(\frac{L_{x+n}}{L_x} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.4.13)$$

Stąd funkcja L_{x+y} zdefiniowana w (1.4.11) ma postać

$$L_{x+y} = L_x \left(\frac{L_{x+n}}{L_x} \right)^{\frac{y}{n}}. \quad (1.4.14)$$

Oznaczmy

$$1 - {}_nq_x = {}_np_x. \quad (1.4.15)$$

Z faktu, że

$$\frac{L_{x+n}}{L_x} = {}_n p_x, \quad (1.4.16)$$

otrzymujemy na podstawie (1.4.14)

$$L_{x+y} = L_x ({}_n p_x)^{\frac{y}{n}}. \quad (1.4.17)$$

Obliczymy czas ekspozycji ${}_n K_x$ jako całkę na przedziale $[0, n]$ z funkcji L_{x+y} . Mamy

$$\begin{aligned} K_x &= \int_0^n L_{x+y} dy = \int_0^n L_x ({}_n p_x)^{\frac{y}{n}} dy = \\ &= L_x \int_0^n \exp\left\{\frac{y}{n} \ln {}_n p_x\right\} dy. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Ostatnie przekształcenie pod całką wynika z faktu, że

$$a^z \equiv e^{z \ln a} \quad \text{dla dowolnej, dodatniej stałej } a. \quad (1.4.19)$$

Dokonamy zamiany zmiennych. Niech

$$z = \frac{y}{n} \ln {}_n p_x, \quad \text{stad} \quad dy = \frac{n}{\ln {}_n p_x} dz. \quad (1.4.20)$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} {}_n K_x &= n L_x \int_0^{\ln {}_n p_x} \frac{e^z}{\ln {}_n p_x} dz = \\ &= \frac{n L_x}{\ln {}_n p_x} \int_0^{\ln {}_n p_x} e^z dz = \frac{n L_x}{\ln {}_n p_x} e^z \Big|_0^{\ln {}_n p_x} = \\ &= \frac{n L_x}{\ln {}_n p_x} (e^{\ln {}_n p_x} - e^0) = \frac{n L_x}{\ln {}_n p_x} ({}_n p_x - 1) = \\ &= -\frac{n L_x}{\ln {}_n p_x} {}_n q_x. \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

Z relacji $L_x {}_n q_x = {}_n Z_x$, otrzymujemy

$${}_n K_x = -n \frac{{}_n Z_x}{\ln {}_n p_x}. \quad (1.4.22)$$

Przyrównując otrzymany wynik do prawej strony wzoru (1.3.2), definiującego czas ekspozycji ${}_nK_x$, tj. do wyrażenia

$${}_nL_{x+n} + {}_na_x{}_nZ_x, \quad (1.4.23)$$

uzyskujemy równość

$$-n \frac{{}_nZ_x}{\ln {}_np_x} = {}_nL_{x+n} + {}_na_x{}_nZ_x. \quad (1.4.24)$$

Ostatecznie, wzór na współczynnik ${}_na_x$ ma postać

$$\begin{aligned} {}_na_x &= -\frac{{}_nL_{x+n}}{{}_nZ_x} - \frac{n}{\ln {}_np_x} = -n \frac{{}_np_x}{{}_nq_x} - \frac{n}{\ln {}_np_x} = \\ &= n - \frac{n}{{}_nq_x} - \frac{n}{\ln(1 - {}_nq_x)}. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Zbadamy teraz związek pomiędzy współczynnikiem zgonów ${}_nm_x$ oraz prawdopodobieństwem zgonów ${}_nq_x$ w modelu interpolacji wykładniczej. Z definicji cząstkowego współczynnika zgonów mamy

$${}_nm_x = \frac{{}_nZ_x}{{}_nK_x} C. \quad (1.4.26)$$

Przyjmijmy dalej $C = 1$. Korzystając z (1.4.22), wzór (1.4.26) sprowadza się do postaci

$${}_nm_x = \frac{{}_nZ_x}{{}_nK_x} = \frac{{}_nZ_x}{-n \frac{{}_nZ_x}{\ln {}_np_x}} = -\frac{1}{n} \ln {}_np_x = -\frac{1}{n} \ln(1 - {}_nq_x), \quad (1.4.27)$$

otrzymaliśmy

$${}_nm_x = -\frac{1}{n} \ln(1 - {}_nq_x). \quad (1.4.28)$$

Relację wiążącą współczynniki i prawdopodobieństwa zgonów można także zapisać równoważnie wzorem

$${}_nq_x = 1 - e^{-n {}_nm_x}. \quad (1.4.29)$$

W przypadku szczególnym, gdy $n = 1$, powyższą formułę można zredukować do postaci

$$q_x = 1 - e^{-m_x}. \quad (1.4.30)$$

1.5. Inne tablicowe mierniki umieralności

Częstkowe współczynniki zgonów ${}_n m_x$ i warunkowe prawdopodobieństwa zgonów ${}_n q_x$ stanowią podstawowe mierniki umieralności. Nazywamy je także miernikami tablicowymi, oblicza się je bowiem dla arbitralnie określonych przedziałów wieku $[x, x+n)$, $n \in \mathbf{N}$ i można je zapisać w formie tabelarycznej. Modele umieralności oparte na tego rodzaju charakterystykach tablicowych zaliczyć można do tzw. modeli dyskretnych.

Inne ważne tablicowe mierniki umieralności są konstruowane na podstawie współczynników zgonów m_x lub warunkowych prawdopodobieństw zgonów q_x dla rocznych grup wieku $[x, x+1)$. Do nich należą m.in. fundusz życia T_x oraz średnie dalsze trwanie życia e_x . Mierniki te są definiowane wzorami:

- Fundusz życia T_x , czyli pozostały czas życia wszystkich dożywających wieku x łącznie

$$T_x = \sum_{y=x}^{\infty} K_y, \quad (1.5.1)$$

- Średnie dalsze trwanie życia e_x , czyli średni czas życia osób w wieku x ukończonych lat

$$e_x = \frac{T_x}{L_x}. \quad (1.5.2)$$

W praktyce wyznaczenie wymienionych wielkości na podstawie obserwacji rzeczywistych wymaga zwykle długiego oczekiwania przez czas życia wszystkich członków danej generacji (tzw. ujęcie kohortowe). Z tego powodu na potrzeby statystyki publicznej zakłada się zwykle pewną hipotetyczną generację, w której proces wymierania jest zgodny z obserwowanymi miernikami umieralności we wszystkich generacjach, żyjących jednocześnie w tym samym okresie, przy czym okresem tym jest zazwyczaj ustalony rok kalendarzowy (ujęcie przekrojowe). Tego rodzaju rozwiązanie pozwala na wyznaczanie bieżących, tablicowych mierników umieralności dla wszystkich grup wieku i dla każdego okresu. Mierniki przekrojowe zapisuje się, dodając indeks okresu t , którego dotyczą, np. $m_{x,t}$, $q_{x,t}$, $e_{x,t}$.

1.6. Związek kohortowych współczynników zgonów i natężenia zgonów

Analiza umieralności za pomocą mierników tablicowych wymaga podziału na pewne arbitralne przedziały wieku $[x, x+n)$, gdzie x, n są liczbami nieujemnymi, całkowitymi.

W niektórych zastosowaniach ważne jest obliczanie określonych charakterystyk dla dowolnego wieku x i dla przedziału $[x, x + y)$ o dowolnie małej długości $y > 0$. Ujęcie takie jest możliwe, gdy potraktujemy czas życia jako zmienną losową o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Definicja 1.3. Niech X będzie nieujemną i ciągłą zmienną losową reprezentującą czas życia noworodka. Niech F_X będzie dystrybucją rozkładu zmiennej X , czyli

$$F_X(x) = P(X < x), \quad (1.6.1)$$

taką, że $F_X(0) = 0$.

Funkcją przeżycia S_X zmiennej X nazywamy funkcję komplementarną do F_X , czyli

$$S_X(x) = 1 - F_X(x). \quad (1.6.2)$$

Dalej, dla uproszczenia, funkcje F_X, S_X będą oznaczone odpowiednio przez F i S . Z definicji 1.3 wynika, że dla ustalonego $x \geq 0$ wartość $S(x)$ określa prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany noworodek dożyje wieku x .

Definicja 1.4. Załóżmy, że $x \geq 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Niech

$$Y(x) = X - x \quad \text{dla} \quad X \geq x. \quad (1.6.3)$$

Zmienną $Y(x)$ nazywamy pozostałym czasem życia osoby w wieku x .

Dystrybucja zmiennej losowej $Y(x)$ dla zadanego $y \geq 0$ wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} F_{Y(x)}(y) &= P(Y(x) < y) = \\ &= P(X - x < y \mid X \geq x) = P(X < x + y \mid X \geq x) = \\ &= 1 - P(X \geq x + y \mid X \geq x) = \\ &= 1 - \frac{P(X \geq y + x)}{P(X \geq x)} = 1 - \frac{S(x + y)}{S(x)}. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Dla $x = 0$ mamy $Y(0) = X$ i $F_{Y(0)} = F$, a więc zmienna X jest szczególnym przypadkiem $Y(x)$.

Definicja 1.5. Niech F' oznacza pochodną dystrybuanty F , czyli funkcję gęstości f zmiennej X . Funkcją natężenia (intensywności) zgonów nazywamy iloraz

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad x \geq 0. \quad (1.6.5)$$

Wyrażenie $\mu(x)dx$ oznacza w przybliżeniu prawdopodobieństwo zgonu w przedziale $[x, x + dx)$ dla osoby w wieku x .

Całkując stronami (1.6.5) na przedziale $[0, x]$, otrzymamy

$$\int_0^x \mu(z)dz = \int_0^x \frac{f(z)}{S(z)}dz. \quad (1.6.6)$$

Dokonamy zamiany zmiennych pod całką. Niech $v = S(z)$. Mamy wtedy

$$dv = S'(z)dz. \quad (1.6.7)$$

Ponieważ $S = 1 - F$, a więc pochodna $S(z)$ względem z równa jest $-f(z)$, wobec czego mamy $dv = -f(z)dz$. Otrzymujemy

$$\int_0^x \mu(z)dz = - \int_1^{S(x)} \frac{1}{v} dv = - \ln v \Big|_1^{S(x)} = - \ln S(x). \quad (1.6.8)$$

Prawdziwe są więc następujące związki

$$S(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \mu(z)dz \right\} \quad (1.6.9)$$

oraz

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \mu(z)dz \right\}. \quad (1.6.10)$$

Mamy także

$$\begin{aligned} F_{Y(x)}(y) &= 1 - \frac{S(x+y)}{S(x)} = 1 - \frac{\exp \left\{ - \int_0^{x+y} \mu(z)dz \right\}}{\exp \left\{ - \int_0^x \mu(z)dz \right\}} = \\ &= 1 - \exp \left\{ - \int_x^{x+y} \mu(z)dz \right\}. \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Wynika z powyższego, że funkcja intensywności μ jednoznacznie identyfikuje rozkłady zmiennych losowych X i $Y(x)$.

Na podstawie otrzymanych wzorów można łatwo obliczyć gęstość $f_{Y(x)}$ zmiennej losowej $Y(x)$. Ponieważ zachodzi

$$F_{Y(x)}(y) = 1 - \frac{S(x+y)}{S(x)}, \quad x \geq 0, \quad (1.6.12)$$

a więc dla dowolnego $y \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} f_{Y(x)}(y) &= \frac{dF_{Y(x)}(y)}{dy} = -\frac{1}{S(x)} \frac{dS(x+y)}{dy} = \\ &= -\frac{1}{S(x)} (-f(x+y)) = \frac{f(x+y)}{S(x)} = \\ &= \frac{f(x+y)}{S(x+y)} \frac{S(x+y)}{S(x)} = {}_y p_x \mu(x+y) = \\ &= \mu(x+y) \exp - \int_x^{x+y} \mu(z) dz, \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

gdzie ${}_y p_x = 1 - {}_y q_x$.

Zbadamy teraz związek pomiędzy natężeniem zgonów $\mu(x)$ a kohortowym współczynnikiem zgonów ${}_n m_x$. Współczynnik ${}_n m_x$ jest miernikiem zdefiniowanym dla kohorty osób, należących do ustalonej grupy wieku $[x, x+n)$. Ma on postać

$${}_n m_x = \frac{{}_n Z_x}{{}_n K_x}. \quad (1.6.14)$$

Warto przypomnieć, że ${}_n Z_x$ reprezentuje liczbę zgonów w przedziale wieku $[x, x+n)$ lat. Można ją zapisać za pomocą różnicy

$${}_n Z_x = L_x - L_{x+n}, \quad (1.6.15)$$

gdzie L_x oznacza liczbę osób w kohorcie, dożywających x -tych urodzin. Czas ekspozycji na ryzyko zgonu w podanym przedziale wyraża się wzorem

$${}_n K_x = {}_n L_{x+n} + {}_n a_x {}_n Z_x. \quad (1.6.16)$$

Zbadamy granicę $\lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x$, zakładając, że n jest dodatnią liczbą rzeczywistą, niekoniecznie całkowitą.

Zauważmy, że dla małych n czas ekspozycji ${}_nK_x$ może być przybliżony wzorem

$${}_nK_x \approx nL_x. \quad (1.6.17)$$

Przybliżenie to jest tym lepsze, im mniejsza jest długość n przedziału.

Dla $n \rightarrow 0$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow 0} {}_nm_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{L_x - L_{x+n}}{nL_x}. \quad (1.6.18)$$

Z definicji pochodnej funkcji wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{L_x - L_{x+n}}{n} = -L'_x, \quad (1.6.19)$$

a stąd otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow 0} {}_nm_x = -\frac{L'_x}{L_x}. \quad (1.6.20)$$

Ponieważ zachodzi związek $L_x = L_0S(x)$, gdzie L_0 oznacza początkową liczebność badanej generacji, a więc mamy dalej

$$\lim_{n \rightarrow 0} {}_nm_x = -\frac{L_0S'(x)}{L_0S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = \mu(x), \quad (1.6.21)$$

z czego wynika, że intensywność zgonów $\mu(x)$ jest granicą, do której dąży kohortowy współczynnik zgonów ${}_nm_x$, gdy $n \rightarrow 0$.

1.7. Prawa umieralności

W literaturze podejmowano wiele prób definiowania funkcji intensywności zgonów μ , nazywanej także „prawem umieralności”. Bardziej znane to model wykładniczy, model de Moivre’a, model Gompertza–Makehama i model Weibulla (por. [36], [79]).

Model wykładniczy zakłada stałe natężenie zgonów

$$\mu(x) \equiv \mu = \text{const}, \quad x \geq 0. \quad (1.7.1)$$

Model ten nie jest adekwatny do populacji ludzkich, ponieważ zakłada, że natężenie zgonów jest jednakowe dla dowolnego wieku x . Z tego powodu w modelach demograficznych przyjmuje się bardziej realistyczne założenie, że $\mu(x)$ jest przedziałami stała, co dla dostatecznie wąskich przedziałów wieku może być dobrym przybliżeniem rzeczywistego natężenia

zgonów. Założenie o stałej intensywności zgonów w określonych przedziałach wieku jest *de facto* sprowadzeniem problemu do ujęcia rozważanego w paragrafie 1.4.2.

Model de Moivre’a z roku 1725 zakłada istnienie pewnego, nieprzekraczalnego wieku granicznego X . Natężenie zgonów w tym modelu wyraża się formułą

$$\mu(x) = \frac{1}{X-x}, \quad \text{dla } 0 < x < X. \quad (1.7.2)$$

Z kolei model Gompertza z roku 1825 ma następującą postać

$$\mu(x) = Bc^x, \quad B > 0, c \geq 1, x \geq 0. \quad (1.7.3)$$

Model ten oparty jest na założeniu, że intensywność zgonów rośnie wykładniczo wraz z wiekiem. Propozycja Gompertza została zmodyfikowana w roku 1860 przez Makehama do postaci

$$\mu(x) = A + Bc^x, \quad A, B > 0, c \geq 1, x \geq 0. \quad (1.7.4)$$

Stała A reprezentuje tę część natężenia wymierania, która nie zależy od wieku. Model (1.7.4) nosi nazwę prawa umieralności Gompertza–Makehama i jest często wykorzystywany w analizach aktuarialnych.

W propozycji Weibulla z roku 1939 [108] funkcja μ ma postać

$$\mu(x) = ax^{b-1}, \quad a, b > 0, x \geq 0. \quad (1.7.5)$$

Rodzina rozkładów Weibulla charakteryzuje się monotoniczną funkcją intensywności (rosnącą, malejącą lub stałą). Model ten jest stosowany głównie w analizach niezawodności urządzeń, rzadziej do modelowania zjawisk demograficznych.

Historyczne propozycje praw umieralności zebrane zostały m.in. w monografii pod redakcją E. Tabeau [105] (por. tablica 1.1).

Należy zaznaczyć, że we współczesnej literaturze znaleźć można wiele prac poświęconych tematyce modelowania rozkładu czasu życia, zarówno w ujęciu dyskretnym ([25], [48]), jak i ciągłym. Proponowanymi w literaturze rozkładami ciągłymi są m.in. uogólniony rozkład gamma, rozkład Pareto, rozkład logarytmiczno-normalny bądź logarytmiczno-logistyczny (np. [5], [6], [18], [19], [33], [46], [70], [84], [86], [87], [101], [102], [111]). Rozważane są też pewne klasy rozkładów z niemonotoniczną funkcją intensywności, w tym z funkcją kwadratową, a także ogólniej – wielomianową lub w kształcie „wanny” (np. [7], [49], [58], [63], [83]).

Tablica 1.1. Prawa umieralności (modele historyczne)

Autor, rok	Postać funkcji μ_x , $S(x)$ lub q_x
De Moivre, 1725	$\mu_x = \frac{1}{X-x},$
Gompertz, 1825	$\mu_x = Bc^x, \quad B > 0, \quad c \geq 1$
Makeham, 1860	$\mu_x = A + Bc^x, \quad A, B > 0, \quad c \geq 1$
Opperman, 1870	$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$
Thiele, 1872	$\mu_x = a_1e^{-b_1x} + a_2e^{-\frac{1}{2}b_2(x-c)^2} + a_3e^{b_3x}$
Wittstein, 1883	$q_x = \frac{1}{m}a^{-(mx)^n} + a^{-(M-x)^n}$
Steffenson, 1930	$\log_{10} S(x) = 10^{-A\sqrt{x}-B} + C$
Perks, 1932	$\mu_x = \frac{A+Bc^x}{kc^{-x}+1+Dc^x}$
Harper, 1936	$\log_{10} S(x) = A + 10^{B\sqrt{x}+Cx+D}$
Weibull, 1939	$\mu_x = ax^{b-1}$
Van der Maen, 1943	$\mu_x = A + Bx + Cx^2 + \frac{1}{N-x}$ $\mu_x = A + Bc^x + \frac{c}{N-x}$

Źródło: [105], s. 7.

W latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku pojawiły się parametryczne modele regresji dla funkcji intensywności, zakładające multiplikatywną zależność tej funkcji od ustalonej, bazowej funkcji intensywności (zwanej też funkcją hazardu) i pewnej nieliniowej funkcji wektora zmiennych objaśniających (czynników ryzyka). Stały się one punktem wyjścia popularnego obecnie tzw. semiparametrycznego modelu Coxa. Estymacja tego rodzaju modeli sprowadza się do estymacji funkcji hazardu bazowego oraz współczynników regresji przy zmiennych objaśniających ([35], [39], [116]).

W modelu Coxa funkcja natężenia zgonów równa jest iloczynowi dowolnej, bazowej funkcji intensywności oraz wykładniczej funkcji wektora zmiennych objaśniających. Jest to model semiparametryczny, ponieważ zakłada dowolną postać funkcji bazowej i parametryczną postać funkcji czynników ryzyka. Przy założeniu, że zmienne objaśniające nie zależą od czasu, a bazowa funkcja intensywności jest jednakowa dla jednostek danej populacji, model Coxa nosi nazwę modelu proporcjonalnych hazardów. Parametry modelu szacuje się poprzez maksymalizację tzw. funkcji cząstkowej wiarygodności ([27], [28]).

Pewną alternatywą w stosunku do multiplikatywnych modeli regresji funkcji hazardu są addytywne modele regresji i modele proporcjonalnych ilorazów szans ([10], [52], [67], [80]). Szeroko znane są także modele nieparametryczne, w tym model Kaplana–Meiera dla funkcji przeżycia oraz model Nelsona–Aalena dla funkcji skumulowanej intensywności ([1], [55], [75]).

1.8. Wybrane modele umieralności

Długookresowe obserwacje dotyczące tablicowych lub funkcyjnych charakterystyk rozkładu czasu trwania życia pozwalają zauważyć, że podlegają one zmianom w czasie. Przykładowo, z obserwacji natężenia zgonów w krajach rozwiniętych wynika, że cząstkowe współczynniki zgonów mają tendencję spadkową w wielu grupach wieku, zarówno wśród mężczyzn, jak i kobiet, przy jednoczesnym podnoszeniu się górnej granicy trwania życia. Zmiany w czasie wykazują także inne parametry tablic wymieralności, np. średnie dalsze trwanie życia czy też warunkowe prawdopodobieństwa zgonów. Można je zatem traktować jak procesy stochastyczne, które cechuje, obok ogólnej tendencji, pewna stochastyczna zmienność.

Tendencje i prawidłowości obserwowane w krajach rozwiniętych w drugiej połowie XX wieku w odniesieniu do zjawiska umieralności i czasu trwania życia można podsumować następująco ([109]):

- normalne trwanie życia (wiek, na który przypada największa intensywność zgonów w okresie starości), przesuwana się w kierunku coraz starszych grup wieku,
- wzrasta koncentracja zgonów wokół wartości normalnej,
- krzywa przeżycia przybiera kształt prostokąta (tzw. zjawisko rektangularyzacji rozkładu, które jest konsekwencją wymienionych wyżej tendencji),
- wzrasta średnia długość życia,
- wśród osób młodych, zwłaszcza dwudziestoparoletnich mężczyzn, rośnie liczba i udział zgonów powodowanych przyczynami zewnętrznymi, takimi jak urazy, wypadki, zatrucia.

W literaturze podjęto próby budowy modeli umieralności z wykorzystaniem aparatu stochastycznego. Jednym z bardziej obecnie rozpowszechnionych jest stochastyczny model umieralności Lee–Cartera.

1.8.1. Model Lee–Cartera

Model Lee–Cartera [65] można zdefiniować wzorem

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (1.8.1)$$

lub równoważnie

$$m_{x,t} = \exp \{ \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \}, \quad (1.8.2)$$

gdzie:

$x \in \{x_1, \dots, x_n\}$, jest indeksem oznaczającym wiek w ukończonych latach,

$t \in \{t_1, \dots, t_m\}$ jest indeksem wskazującym na kolejne okresy czasu (lata kalendarzowe),

$m_{x,t}$ jest częstkowym (kohortowym, przekrojowym lub przekrojowo-kohortowym) współczynnikiem zgonów w grupie wieku x w okresie t ,

α_x , β_x oraz κ_t są parametrami modelu, przy czym α_x , β_x zależą od wieku x , natomiast κ_t – od czasu t ,

$\varepsilon_{x,t}$ są składnikami losowymi, co do których zakłada się, iż są wzajemnie niezależne, o jednakowych rozkładach normalnych z wartością oczekiwaną równą 0 i jednakową, stałą wariancją.

Dalej zakładać będziemy, że indeks x przybiera wartości ze zbioru $\{0, 1, \dots, X\}$, gdzie X oznacza górną granicę wieku. Przyjmijmy także, że t przyjmuje wartości ze zbioru liczb naturalnych $\{1, 2, \dots, T\}$, gdzie $1, 2, \dots, T$ są umownymi indeksami kolejnych lat kalendarzowych, objętych analizą.

Ze względu na iloczyn parametrów β_x oraz κ_t w formule (1.8.1), model Lee–Cartera określany jest mianem modelu biliniowego.

Układ równań (1.8.1) lub (1.8.2) nie ma jednoznacznego rozwiązania bez dodatkowych warunków ograniczających. Załóżmy, że dla pewnego zestawu parametrów $\{\alpha_x\}$, $\{\beta_x\}$ oraz $\{\kappa_t\}$ prawdziwy jest model (1.8.1). Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej stałej c i dla zbioru parametrów $\{\alpha_x - c\beta_x\}$, $\{\beta_x\}$, $\{\kappa_t + c\}$ lub $\{\alpha_x\}$, $\{c\beta_x\}$, $\{\kappa_t/c\}$ model ten jest także prawdziwy. Dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązania konieczne jest zatem przyjęcie dodatkowych warunków ograniczających. W tym celu zakłada się, że suma parametrów β_x wynosi 1, natomiast suma parametrów κ_t jest równa 0, czyli

$$\sum_{x=0}^X \beta_x = 1 \quad (1.8.3)$$

oraz

$$\sum_{t=1}^T \kappa_t = 0. \quad (1.8.4)$$

Parametry α_x i β_x nie zależą od czasu t , co oznacza, że raz wyznaczone mogą być użyte do prognozowania współczynników zgonów w przyszłych okresach, tj. dla $t > T$. Parametrami zmieniającymi się wraz z czasem są natomiast wskaźniki κ_t , które można modelować, wykorzystując wybrane metody analizy szeregów czasowych. Autorzy, R. D. Lee i L. Carter, wykorzystali w tym celu model błędzenia przypadkowego, jednakże w literaturze spotkać można także propozycje zastosowania do tego celu np. modeli ARIMA (por. [76]).

Model błędzenia przypadkowego z dryfem opisany jest formułą

$$\kappa_t = \delta + \kappa_{t-1} + \xi_t, \quad (1.8.5)$$

gdzie δ jest pewną stałą (dryf), a ξ_t składnikiem losowym.

Parametr δ w (1.8.5) przyjmuje na ogół wartości ujemne, co wskazuje na trend spadkowy umieralności. Losowe fluktuacje wokół trendu są reprezentowane przez niezależne składniki losowe ξ_t , każdy o rozkładzie normalnym, z wartością oczekiwaną równą 0 i skończoną wariancją.

Prognozy dotyczące przewidywanych wartości κ_t , oparte na formule (1.8.5), w połączeniu z oszacowaniami α_x i β_x , pozwalają na sporządzenie prognoz cząstkowych współczynników zgonów $\tilde{m}_{x,t}$ dla przyszłych okresów, zgodnie ze wzorem

$$\tilde{m}_{x,t} = \exp\{\alpha_x + \beta_x \tilde{\kappa}_t\}, \quad (1.8.6)$$

gdzie $\tilde{\kappa}_t$ oznacza prognozę parametru κ_t wyznaczoną dla $t > T$ z modelu (1.8.5).

Na podstawie prognoz współczynników zgonów możliwe jest prognozowanie w dalszej kolejności innych tablicowych charakterystyk umieralności, np. średniego dalszego trwania życia dla osób dożywających ustalonego wieku x .

Metoda estymacji parametrów modelu (1.8.1), zaproponowana przez R. D. Lee i L. Cartera, odwołuje się do koncepcji dekompozycji SVD (*Singular Value Decomposition*). Polega ona na rozkładzie macierzy obserwacji na trzy macierze, tj. macierz wartości osobliwych oraz lewą i prawą macierz wektorów osobliwych.

Idea faktoryzacji macierzy obserwacji opiera się na twierdzeniu o dekompozycji macierzy¹. Każdą macierz prostokątną $\mathbf{W}_{m \times n}$ można bowiem przedstawić w postaci

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T, \quad (1.8.7)$$

gdzie $\mathbf{D}_{m \times n}$ jest postaci

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.8.8)$$

przy czym

$$\Sigma = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_r \end{bmatrix}, \quad (1.8.9)$$

gdzie r oznacza liczbę niezerowych wartości osobliwych $d_1, d_2, \dots, d_r$.

Wartości osobliwe macierzy $\mathbf{W}$ wyznacza się jako pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$. Macierz $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ o wymiarach $n \times n$ jest ortogonalną macierzą prawych wektorów osobliwych, będących równocześnie wektorami własnymi macierzy kwadratowej $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$. Z kolei macierz $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m]$ o wymiarach $m \times m$ jest macierzą ortogonalną lewych wektorów osobliwych, gdzie $\mathbf{u}_i = \frac{1}{d_i}\mathbf{W}\mathbf{v}_i$ dla $i = 1, 2, \dots, r$.

Z (1.8.7) wynika, że każdy element $w_{x,t}$ macierzy $\mathbf{W}$ może być zapisany w postaci sumy

$$w_{x,t} = \sum_{i=1}^r d_i u_{x,i} v_{t,i}, \quad (1.8.10)$$

gdzie:

$u_{x,i}$ oznacza x -ty element i -tego wektora kolumnowego macierzy $\mathbf{U}$,
 $v_{t,i}$ jest t -tym elementem i -tego wektora kolumnowego macierzy $\mathbf{V}$,
 d_i jest i -tą wartością osobliwą macierzy $\mathbf{W}$.

Należy dodać, że suma wyrazów $v_{t,i}$ wektorów kolumnowych macierzy $\mathbf{V}$ jest równa

$$\sum_{t=1}^T v_{t,i} = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, r. \quad (1.8.11)$$

¹ SVD odkryta została niezależnie przez kilku autorów: E. Beltrami w 1873 r., C. Jordan w 1875 r., J. Sylvester w 1889 r., L. Autonne w 1913 r., C. Eckart i G. Young w 1936 r.

Niech a_x, b_x, k_t oznaczają estymatory parametrów $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ w modelu Lee–Cartera. Ponadto, niech elementami $w_{x,t}$ macierzy $\mathbf{W}$ będą wyrażenia

$$w_{x,t} = \ln m_{x,t} - a_x. \quad (1.8.12)$$

Z (1.8.10) mamy

$$\ln m_{x,t} - a_x = \sum_{i=1}^r d_i u_{x,i} v_{t,i} \quad (1.8.13)$$

lub równoważnie

$$\ln m_{x,t} = a_x + \sum_{i=1}^r d_i u_{x,i} v_{t,i}. \quad (1.8.14)$$

Redukując liczbę składników pod sumą do pierwszego wyrazu oraz oznaczając pozostałe składniki symbolem $\epsilon_{x,t}$, otrzymujemy

$$\ln m_{x,t} = a_x + d_1 u_{x,1} v_{t,1} + \epsilon_{x,t} \quad (1.8.15)$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$b_x = \frac{u_{x,1}}{\sum_{x=0}^X u_{x,1}}, \quad k_t = d_1 v_{t,1} \sum_{x=0}^X u_{x,1}. \quad (1.8.16)$$

Wówczas (1.8.15) przybiera postać

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}, \quad (1.8.17)$$

gdzie

$$\sum_{x=0}^X b_x = 1, \quad \sum_{t=1}^T k_t = 0. \quad (1.8.18)$$

Orzymaliśmy model Lee–Cartera (1.8.1) z warunkami (1.8.3)–(1.8.4).

Wzory (1.8.16) definiują estymatory b_x, k_t parametrów β_x, κ_t , wyznaczone metodą SVD. Korzysta się w nich z pierwszej wartości osobliwej oraz składowych pierwszego lewego i pierwszego prawego wektora osobliwego macierzy $\mathbf{W}$ o elementach (1.8.12).

W ogólnym przypadku rozważać można rozwinięcie z uwzględnieniem wszystkich niezerowych wartości i wektorów osobliwych, które po odpowiedniej zmianie oznaczeń prowadzi do wzoru

$$\ln m_{x,t} = a_x + \sum_{i=1}^r b_x^{(i)} k_t^{(i)}. \quad (1.8.19)$$

W celu znalezienia estymatora a_x parametru α_x , skorzystamy z założenia, iż składniki losowe $x_{x,t}$ w modelu (1.8.1) mają wartość oczekiwaną równą 0, czyli

$$E[x_{x,t}] = 0. \quad (1.8.20)$$

Wyznamy analogiczny moment zwykły pierwszego rzędu z próby, tj. na podstawie danych z szeregów czasowych

$$\{\ln m_{x,t}, t = 1, 2, \dots, T\}.$$

Korzystając z własności (1.8.20), przyrównamy do 0 sumę reszt, czyli wyrażenie

$$\sum_{t=1}^T [\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)]. \quad (1.8.21)$$

Mamy

$$\sum_{t=1}^T [\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)] = 0, \quad (1.8.22)$$

co po przekształceniach daje

$$T a_x + b_x \sum_{t=1}^T k_t = \sum_{t=1}^T \ln m_{x,t}. \quad (1.8.23)$$

Uwzględniając dodatkowo warunek (1.8.4), otrzymujemy

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{x,t}. \quad (1.8.24)$$

Wyrazy a_x reprezentują zatem średni poziom umieralności w poszczególnych grupach wieku x , uśredniony względem czasu t . Współczynniki b_x opisują z kolei profile umieralności według wieku. Charakteryzują bowiem „wrażliwość” poziomu umieralności w poszczególnych grupach wieku na zmiany wskaźników k_t . Te ostatnie wyrażają ogólną tendencję zmian umieralności w czasie.

Ze względu na założenie o jednorodności składników losowych $x_{x,t}$, Brouhns i in. [20] zaproponowali inną metodę estymacji, odnoszącą się do rozkładu liczby zgonów, w którym model (1.8.2) opisuje intensywność zgonów.

Jeśli przyjmiemy założenie o stałej intensywności zgonów w rocznych przedziałach wieku w ustalonych latach kalendarzowych, wówczas liczby

zgonów $D_{x,t}$ zaobserwowane w poszczególnych grupach wieku i kolejnych latach okresu obserwacji są niezależnymi zmiennymi losowymi, o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda_{x,t} = K_{x,t}m_{x,t}$, czyli

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(K_{x,t}m_{x,t}), \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.8.25)$$

gdzie $K_{x,t}$ oznacza czas ekspozycji na ryzyko zgonu w ciągu roku t w grupie osób w wieku x ukończonych lat.

Estymatory parametrów $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ wyznaczamy w tym przypadku metodą największej wiarygodności. Funkcja wiarygodności ma postać

$$L(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t | D_{x,t}, K_{x,t}) = \prod_{x=0}^X \prod_{t=1}^T e^{-K_{x,t}m_{x,t}} \frac{(K_{x,t}m_{x,t})^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!}. \quad (1.8.26)$$

Logarytm naturalny funkcji (1.8.26) po uproszczeniach wyraża się wzorem

$$\ln L(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t | D_{x,t}, K_{x,t}) = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T D_{x,t} \ln(m_{x,t}) - K_{x,t}m_{x,t} + C, \quad (1.8.27)$$

gdzie C jest pewną stałą, niezależną od estymowanych parametrów.

Zakładając, że prawdziwy jest związek wyrażony w postaci modelu Lee–Cartera (1.8.1) lub równoważnie (1.8.2), logarytm naturalny funkcji wiarygodności przybiera postać

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t | D_{x,t}, K_{x,t}) &= \\ &= \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T D_{x,t} (\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - K_{x,t} \exp\{\alpha_x + \beta_x \kappa_t\} + C. \end{aligned} \quad (1.8.28)$$

Za estymatory parametrów $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ przyjmujemy takie ich wartości a_x, b_x, k_t , dla których funkcja (1.8.28) osiąga wartość największą. Maksimum funkcji (1.8.28) wyznacza się iteracyjnie (por. [20]).

1.8.2. Modyfikacje i uogólnienia modelu Lee–Cartera

Często spotykane w literaturze modyfikacje modelu Lee–Cartera polegają na uwzględnieniu kolejnych składowych sumy po prawej stronie (1.8.14), co po zmianie oznaczeń prowadzi do relacji (1.8.19).

W niektórych pracach można znaleźć propozycje modeli, w których wyrażenia po lewej stronie (1.8.1) są zastąpione przez tzw. logity warunkowych prawdopodobieństw zgonów, czyli wyrażenia

$$\eta_{x,t} \equiv \text{logit } q_{x,t} = \ln \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}. \quad (1.8.29)$$

Miedzy kohortowymi współczynnikami zgonów i warunkowymi prawdopodobieństwami zgonów zachodzi ogólna relacja (1.3.5), która w zależności od przyjętego modelu interpolacyjnego (por. paragraf 1.4) sprowadza się do formuły (1.4.10) w przypadku interpolacji liniowej lub (1.4.30) w przypadku interpolacji wykładniczej, czyli odpowiednio

$$q_{x,t} = \frac{2m_{x,t}}{2 + m_{x,t}} \quad (1.8.30)$$

lub

$$q_{x,t} = 1 - \exp\{-m_{x,t}\}. \quad (1.8.31)$$

Niektóre rozszerzenia modelu Lee–Cartera uwzględniają ujęcie, w którym rozważa się tzw. efekt kohortowy w postaci dodatkowego parametru $\gamma_{t-x}^{(i)}$. Indeks dolny $t - x$ przy parametrze $\gamma_{t-x}^{(i)}$, wskazuje na rok urodzenia generacji osób, które ukończyły x lat w roku t . Uzasadnieniem przemawiającym za dodaniem tego parametru jest fakt, że natężenie zgonów ma niekiedy specyficzny przebieg w przypadku różnych generacji objętych badaniem.

Kilka modyfikacji lub uogólnień, w tym sam model Lee–Cartera, przedstawionych zostało w pracach [23] oraz [22] w postaci następujących modeli

$$\begin{aligned} M1 : \log m_{x,t} &= \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}, \\ M2 : \log m_{x,t} &= \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \gamma_{t-x}^{(2)}, \\ M3 : \log m_{x,t} &= \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}^{(2)}, \\ M4 : \log m_{x,t} &= \sum_{i,j} \theta_{ij} B_{ij}^{ay}(x, t), \\ M5 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}), \\ M6 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}, \\ M7 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}, \\ M8 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x), \end{aligned} \quad (1.8.32)$$

gdzie:

α_x oraz $\beta_x^{(i)}$ są parametrami reprezentującymi efekty wieku x ,
 $\kappa_t^{(i)}$ są parametrami reprezentującymi efekty czasu kalendarzowego t ,
 $\gamma_{t-x}^{(i)}$ są parametrami odpowiedzialnymi za efekty kohortowe, wynikające z przynależności do generacji osób urodzonych w roku $t - x$,
 x_c jest ustaloną stałą,

$\bar{x}$ oraz σ_x^2 reprezentują odpowiednio średnią i wariancję wieku w ramach grup wieku, uwzględnionych w badaniu, czyli

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{x=x_1}^{x_n} x, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{x=x_1}^{x_n} (x - \bar{x})^2, \quad (1.8.33)$$

$B_{ij}^{ay}(x, t)$ oraz θ_{ij} oznaczają odpowiednio sklejane funkcje bazowe (*splines*) oraz przypisane do nich wagi.

Wybór modelu w konkretnym przypadku zależy od wiedzy i przekonań dotyczących kształtowania się zjawiska umieralności w konkretnej populacji.

Model $M1$ w (1.8.32) jest standardowym modelem Lee–Cartera, a $M2$ jest jego uogólnieniem, uwzględnia bowiem dodatkowo efekty kohortowe. Obydwa modele są równoważne, gdy przyjmiemy $\gamma_{t-x}^{(2)} = 0$.

Podobnie, jak w przypadku $M1$, również w modelu $M2$ występuje problem z identyfikacją parametrów, dlatego nakłada się dodatkowe warunki ograniczające postaci

$$\sum_x \beta_x^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \quad \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \quad \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(2)} = 0. \quad (1.8.34)$$

Z warunku drugiego i trzeciego wynika, że parametry α_x reprezentują średnie logarytmów współczynników zgonów w badanym okresie, czyli średni poziom umieralności dla każdej grupy wieku x . Estymacja pozostałych parametrów przeprowadzana jest metodą iteracyjną (zob. [90]).

Szczególnym przypadkiem $M2$ jest model $M3$, gdy $\beta_x^{(1)} = \beta_x^{(2)} = 1$. Również w tym modelu nakłada się warunki ograniczające

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \quad \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(2)} = 0. \quad (1.8.35)$$

W modelu $M4$ przyjmuje się, że istnieje pewna wygładzona powierzchnia, reprezentująca rozkład logarytmów cząstkowych współczynników zgonów względem wieku x i czasu t .

Podjęcie to różni się zasadniczo od modeli $M1$ – $M3$, w których nie zakłada się „gładkiego” przejścia współczynnika zgonów z jednej grupy wieku do następnej lub z jednego roku kalendarzowego do kolejnego.

Odminną klasę stanowią modele $M5$ – $M8$, w których po lewej stronie występują logity (1.8.29) zamiast logarytmów współczynników zgonów. Modele te nazywać będziemy logitowymi modelami umieralności. Wykorzystuje się tu analogiczne parametry, jak w przypadku modeli $M1$ – $M4$. Reprezentują one efekty wieku, czasu lub efekty kohortowe.

Najprostszy model z tej grupy to model $M5$ z dwoma parametrami $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$. Nie występuje w tym przypadku problem z identyfikacją parametrów. Kolejne trzy modele $M6$ – $M8$ stanowią rozszerzenie $M5$ poprzez dodanie efektów kohortowych. Ze względu jednak na niejednoznaczność tych parametrów, nakłada się tu dodatkowe warunki ograniczające.

W modelu $M6$ warunki te są postaci

$$\sum_{c \in C} \gamma_c^{(3)} = 0, \quad \sum_{c \in C} c \gamma_c^{(3)} = 0. \quad (1.8.36)$$

gdzie $c = t - x$, natomiast C jest zbiorem lat, w których urodziły się generacje poddane analizie.

Ograniczenia (1.8.36) wynikają z koncepcji aproksymacji położenia nieznanymi parametrów $\gamma_c^{(3)}$ za pomocą funkcji liniowej o ogólnej postaci $f(c) = \phi_1 + \phi_2 c$, gdzie ϕ_1, ϕ_2 są pewnymi skalarami. Warunki (1.8.36) sprawiają, że funkcja $f(c)$ pokrywa się z osią poziomą układu współrzędnych, czyli zachodzą równości $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Innymi słowy, warunki (1.8.36) gwarantują, iż wyznaczone oceny parametrów $\gamma_c^{(3)}$ oscylują wokół zera, nie wykazując trendu liniowego.

W modelu $M7$ warunki ograniczające nakładane na parametry kohortowe są bardziej rozbudowane (por. [23])

$$\sum_{c \in C} \gamma_c^{(4)} = 0, \quad \sum_{c \in C} c \gamma_c^{(4)} = 0, \quad \sum_{c \in C} c^2 \gamma_c^{(4)} = 0. \quad (1.8.37)$$

Zakłada się tu bowiem, że funkcja aproksymująca położenie parametrów $\gamma_c^{(4)}$ jest funkcją kwadratową o ogólnej postaci $f(c) = \phi_1 + \phi_2 c + \phi_3 c^2$. Przy warunkach (1.8.37) funkcja $f(c)$ pokrywa się z osią poziomą układu współrzędnych, czyli $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$. Warunki (1.8.37) gwarantują więc, że wartości parametrów $\gamma_c^{(4)}$ oscylują wokół zera, nie wykazując trendu kwadratowego.

W ostatnim modelu $M8$ warunek ograniczający nakładany na parametry kohortowe ma postać

$$\sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0. \quad (1.8.38)$$

Analizy porównawcze dotyczące logitowych modeli umieralności znaleźć można także w publikacji [43], w której rozważane są następujące modele

$$\begin{aligned}
LC : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}, \\
H_1 : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}^{(2)}, \\
M : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \gamma_{t-x}^{(2)}, \\
LC2 : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}, \\
M5 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)}, \\
M6 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}, \\
M7 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + v_x \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}^{(4)}, \\
M8 : \eta_{x,t} &= \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (x_c - x) \gamma_{t-x}^{(3)}, \\
M5^* : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)}, \\
M6^* : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}^{(3)}, \\
M7^* : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + v_x \kappa_t^{(4)} + \gamma_{t-x}^{(4)}, \\
M8^* : \eta_{x,t} &= \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + (x_c - x) \gamma_{t-x}^{(3)},
\end{aligned} \tag{1.8.39}$$

gdzie:

$\alpha_x, \beta_x^{(i)}$ reprezentują efekty wieku,

$\kappa_t^{(i)}$ reprezentują efekty czasu kalendarzowego,

$\gamma_{t-x}^{(i)}$ odpowiadają za efekty kohortowe,

x_c jest ustaloną stałą,

$\bar{x}$ oraz σ_x^2 reprezentują odpowiednio średnią i wariancję wieku w ramach analizowanych grup wieku i są wyrażone formułami (1.8.33),

współczynniki v_x zdefiniowane są wzorem

$$v_x = (x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2. \tag{1.8.40}$$

Pojawiający się w (1.8.39), w grupie modeli $M5^*-M8^*$, składnik

$$(\bar{x} - x)^+ = \max(\bar{x} - x, 0) \tag{1.8.41}$$

ma za zadanie uwzględnienie dodatkowych parametrów $\kappa_t^{(3)}$ reprezentujących zwiększony poziom umieralności w młodszych grupach wieku, tj. dla x mniejszych od $\bar{x}$. Rozważać można także model postaci

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (x_c - x)^+ \kappa_t^{(3)} + v_x \kappa_t^{(4)} + (x_c - x) \gamma_{t-x}, \tag{1.8.42}$$

będący pewnym uogólnieniem statycznych modeli umieralności $M7^*, M8^*$.

1.8.3. Model rozmyty Koissi–Shapiro

Jednym z ciekawszych uogólnień modelu Lee–Cartera jest propozycja M. C. Koissi i A. F. Shapiro z roku 2006 [59], odwołująca się do pojęć i własności liczb rozmytych. Model Lee–Cartera, w wersji podanej przez tych autorów (model FLC), pozwala na włączenie składnika losowego do rozmytej struktury modelu.

Punktem wyjścia w propozycji Koissi–Shapiro jest transformacja logarytmów współczynników zgonów $\ln m_{x,t}$ na symetryczne, trójkątne liczby rozmyte², przedstawiane w postaci uporządkowanych par

$$Y_{x,t} = (y_{x,t}, e_{x,t}), \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.8.43)$$

gdzie $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$ są wartościami centralnymi, natomiast $e_{x,t}$ rozpiętościami charakteryzującymi funkcje przynależności liczb trójkątnych.

W podejściu tym przyjmuje się założenie, że rzeczywiste natężenie umieralności jest obserwowane z pewnym przybliżeniem, co uzasadnia postać modelu FLC, w którym rolę zmiennej objaśnianej odgrywają liczby rozmyte (1.8.43).

Model FLC ma postać

$$Y_{x,t} = A_x \oplus (B_x \odot K_t), \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.8.44)$$

gdzie A_x, B_x, K_t są rozmytymi odpowiednikami parametrów w standardowym modelu Lee–Cartera, natomiast $\oplus, \odot$ oznaczają operatory odpowiednio dodawania i mnożenia liczb rozmytych (definicja 4.6, rozdział 4).

Do estymacji parametrów modelu autorzy zaproponowali metodę minimalizacji funkcji kryterium, do konstrukcji której wykorzystali tzw. odległość Diamonda pomiędzy zmiennymi rozmytymi. W przypadku tego zagadnienia funkcja kryterium przyjmuje postać następującej sumy

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T [3a_x^2 + 3(b_x k_t)^2 + 3y_{x,t}^2 + 6a_x b_x k_t - 4a_x y_{x,t} - 4b_x k_t y_{x,t} + 2e_{x,t}^2] + \\ & + 2 \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T [(\max\{s_{A_x}, |b_x|s_{K_t}, |k_t|s_{B_x}\})^2 - 2e_{x,t} \max\{s_{A_x}, |b_x|s_{K_t}, |k_t|s_{B_x}\}]. \end{aligned}$$

Zadanie minimalizacji tego kryterium nastrocza jednak sporych trudności, ze względu na występujące w nim wyrażenie

$$\max\{s_{A_x}, |b_x|s_{K_t}, |k_t|s_{B_x}\}.$$

² Podstawowe pojęcia z zakresu liczb rozmytych omówione zostały w rozdziale 4.

Z tego powodu nie jest możliwe użycie standardowych, nieliniowych metod optymalizacyjnych. W rozdziałach 4 i 5 zostaną przedstawione modyfikacje modelu FLC, upraszczające problem działań na liczbach rozmytych, a przez to również ułatwiające estymację parametrów modelu.

1.8.4. Wybrane dynamiczne modele umieralności – model Vasička i Coxa–Ingersolla–Rossa

Dalej idące uogólnienia dotyczące modelowania umieralności polegają na przeniesieniu rozważań na grunt stochastycznych równań różniczkowych. Modele tego typu nazywamy modelami dynamicznymi.

Natężenie zgonów $\mu_x(t)$ w tym ujęciu traktowane jest jako proces stochastyczny lub rozwiązanie pewnego stochastycznego równania różniczkowego z czasem ciągłym. Do tej klasy modeli zaliczyć można m.in. model Vasička [112] i model Coxa–Ingersolla–Rossa [29].

Model Vasička przyjmuje postać skalarne, stochastycznego równania Itô

$$d\mu_x(t) = \kappa [\theta - \mu_x(t)] dt + qdw(t), \quad (1.8.45)$$

natomiast model Coxa–Ingersolla–Rossa wyraża się równaniem

$$d\mu_x(t) = \kappa [\theta - \mu_x(t)] dt + q\sqrt{\mu_x(t)}dw(t), \quad (1.8.46)$$

gdzie q jest odchyleniem standardowym procesu, $\theta > 0$ i $\kappa < 0$ są dobranymi parametrami, natomiast $w(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$ jest standardowym procesem Wienera.

W wersji dyskretnej model Vasička i model Coxa–Ingersolla–Rossa sprowadzają się do aproksymacji, odpowiednio

$$m_{x,t+1} = \kappa\theta + (1 - \kappa)m_{x,t} + \varepsilon_{x,t+1}, \quad t \in \mathbf{N} \quad (1.8.47)$$

oraz

$$m_{x,t+1} = \kappa\theta + (1 - \kappa)m_{x,t} + \varepsilon_{x,t+1}, \quad t \in \mathbf{N}. \quad (1.8.48)$$

Z powyższego wynika, że wartość cząstkowego współczynnika zgonów w okresie $t + 1$ jest średnią ważoną wartości tego współczynnika w okresie poprzedzającym t i średniej długookresowej θ , skorygowaną o składnik losowy. Rozważany proces charakteryzuje się zatem właściwością powrotu do średniej θ , przy czym parametr κ odpowiada za prędkość powrotu.

Wadą modelu (1.8.47) jest to, że może generować wartości ujemne. Tego mankamentu nie ma model (1.8.46), w którym dodano pierwiastek

kwadratowy współczynnika zgonów. Obydwa modele można zapisać w postaci uogólnionej

$$d\mu_x(t) = \kappa [\theta - \mu_x(t)] dt + q\mu_x^\gamma(t)dw(t). \quad (1.8.49)$$

W przypadku modelu Vasička mamy $\gamma = 0$, a w przypadku modelu Coxa–Ingersolla–Rossa $\gamma = \frac{1}{2}$.

Estymacji parametrów modeli (1.8.45)–(1.8.46) można dokonać np. za pomocą metody momentów. W tym celu wyznaczamy wartości momentów teoretycznych i przyrównujemy je do analogicznych momentów z próby.

W wersji dyskretniej otrzymujemy następującą aproksymację (1.8.49)

$$m_{x,t+1} - m_{x,t} = \kappa(\theta - m_{x,t}) + \varepsilon_{x,t+1}, \quad t \in \mathbf{N},$$

gdzie $\varepsilon_{x,t}$ jest składnikiem losowym o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą zero. Zatem moment zwykły pierwszego rzędu składnika losowego wynosi

$$E[\varepsilon_{x,t+1}] = 0, \quad (1.8.50)$$

natomiast moment zwykły drugiego rzędu wynosi

$$E[\varepsilon_{x,t+1}^2] = q^2 m_x^{2\gamma}(t). \quad (1.8.51)$$

W przypadku modelu Vasička i modelu Coxa–Ingersolla–Rossa drugi moment zwykły jest równy, odpowiednio

$$E[\varepsilon_{x,t+1}^2] = q^2, \quad E[\varepsilon_{x,t+1}^2] = q^2 m_{x,t}. \quad (1.8.52)$$

Przyjmijmy dodatkowo założenie, że składnik losowy nie zależy od $m_{x,t}$, z czego wynika

$$E[\varepsilon_{x,t+1} m_{x,t}] = 0. \quad (1.8.53)$$

Wyznaczając analogiczne momenty z próby i przyrównując je do wartości momentów teoretycznych (1.8.50), (1.8.52), (1.8.53), możemy oszacować nieznane parametry κ, θ, q .

1.8.5. Dynamiczny model umieralności Lee–Cartera

Idea dynamicznego modelu Lee–Cartera DLC (*Dynamic Lee–Carter Model*) została przedstawiona przez autorów niniejszej książki w pracy [92]. W publikacji tej intensywność zgonów $\mu_x(t)$ wyrażona została za pomocą stochastycznego równania różniczkowego Itô

$$d\mu_x(t) = \alpha_x(t) + \frac{1}{2}\sigma_x^2 \mu_x(t)dt + \sigma_x \mu_x(t)dw(t), \quad (1.8.54)$$

$$\alpha_x(t) = \beta_x \kappa'(t), \quad \mu_x(0) = e^{\alpha_x + \beta_x k(0)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, X, \quad (1.8.55)$$

gdzie:

$\alpha_x, \beta_x, \sigma_x$ są nieznanymi parametrami,
 $\kappa(t)$ jest różniczkowalną, deterministyczną funkcją zmiennej $t \in \mathbf{R}^+$,
 $w(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Rozwiązanie (1.8.54)–(1.8.55) przyjmuje postać

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa(t) + \sigma_x w(t) \quad (1.8.56)$$

lub równoważnie

$$\mu_x(t) = \exp \{ \alpha_x + \beta_x \kappa(t) + \sigma_x w(t) \}. \quad (1.8.57)$$

Oznaczając $_{x,t} = \sigma_x w(t)$ otrzymujemy model zbliżony do statycznego modelu Lee–Cartera, choć różniący się własnościami składnika losowego.

Założmy dalej liniową postać funkcji $\kappa(t)$

$$\kappa(t) = \chi + t\delta, \quad (1.8.58)$$

taką, że

$$\int_{t_1}^{t_n} \kappa(t) dt = 0, \quad (1.8.59)$$

gdzie $[t_1, t_n]$ oznacza przedział czasowy obserwacji.

W wersji dyskretnej otrzymujemy następującą aproksymację (1.8.56)

$$\ln m_{x,t+1} = \alpha_x + \beta_x [\chi + (t+1)\delta] + \sigma_x w(t+1), \quad t \in \mathbf{N}, \quad (1.8.60)$$

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x [\chi + t\delta] + \sigma_x w(t), \quad t \in \mathbf{N}, \quad (1.8.61)$$

z czego wynika związek

$$\ln m_{x,t+1} - \ln m_{x,t} = \beta_x \delta + _{x,t+1}, \quad t \in \mathbf{N}, \quad (1.8.62)$$

gdzie $_{x,t+1}$ jest składnikiem losowym o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą 0 i wariancją σ_x^2 .

Do estymacji parametrów $\alpha_x, \beta_x, \sigma_x^2, \delta$ można wykorzystać metodę momentów. Pierwszy moment zwykły składnika losowego wynosi

$$E[_{x,t+1}] = 0. \quad (1.8.63)$$

Moment zwykły drugiego rzędu jest równy

$$E[_{x,t+1}^2] = \sigma_x^2. \quad (1.8.64)$$

Wyznaczając analogiczne momenty z próby i korzystając z relacji (1.8.63) i (1.8.64) wiążących je z parametrami modelu, możemy wyznaczyć oceny nieznanymi parametrów $\beta_x, \sigma_x^2, \delta$, osobno dla każdego $x = 0, 1, \dots, X$.

Na podstawie szeregów czasowych $\{\ln m_{x,t}, t = 1, 2, \dots, T\}$ otrzymujemy układ równań dla momentów zwykłych pierwszego i drugiego rzędu z próby

$$\begin{cases} \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\ln m_{x,t+1} - \ln m_{x,t} - b_x d) = 0, \\ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\ln m_{x,t+1} - \ln m_{x,t} - b_x d)^2 = s_x^2. \end{cases} \quad (1.8.65)$$

Przez analogię do statycznego modelu Lee–Cartera, przyjmiemy dodatkowo warunek ograniczający, pozwalający na jednoznaczne wyznaczenie ocen b_x parametrów β_x dla $x = 0, 1, \dots, X$. Warunek ten ma postać

$$\sum_{x=0}^X b_x = 1. \quad (1.8.66)$$

Z pierwszego równania w (1.8.65) otrzymujemy

$$b_x = \frac{\ln m_{x,T} - \ln m_{x,1}}{d(T-1)}. \quad (1.8.67)$$

Ponadto, na podstawie pierwszego równania prawdziwa jest również następująca równość

$$\frac{1}{T-1} \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^{T-1} (\ln m_{x,t+1} - \ln m_{x,t} - b_x d) = 0.$$

Przy uwzględnieniu warunku (1.8.66) otrzymujemy

$$d = \frac{1}{T-1} \sum_{x=0}^X (\ln m_{x,T} - \ln m_{x,1}). \quad (1.8.68)$$

Bezpośrednio z drugiego równania w (1.8.65) mamy także

$$s_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\ln m_{x,t+1} - \ln m_{x,t} - b_x d)^2. \quad (1.8.69)$$

Dodatkowo z (1.8.58)–(1.8.59) wynika związek łączący parametry χ i δ . Przyjmijmy $t_1 = 1$ oraz $t_n = T$. Mamy wtedy

$$\chi = -\frac{\delta(T+1)}{2},$$

stad estymator c parametru χ ma postać

$$c = -\frac{d(T+1)}{2}. \quad (1.8.70)$$

W celu wyznaczenia estymatorów a_x parametrów α_x , $x = 0, 1, \dots, X$, odwołamy się ponownie do metody momentów. Na podstawie (1.8.61) dostajemy

$$\ln m_{x,t} - \alpha_x - \beta_x(\chi + t\delta) = \sigma_x w(t),$$

gdzie $w(t)$ jest procesem Wienera z wartością oczekiwaną równą 0.

Estymator a_x wyznaczymy zatem z równania

$$\sum_{t=1}^T (\ln m_{x,t} - a_x - b_x(c + td)) = 0.$$

Po kilku przekształceniach, wykorzystując relację (1.8.70), otrzymujemy

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{x,t}, \quad x = 0, 1, \dots, X. \quad (1.8.71)$$

Wyniki estymacji modelu (1.8.54)–(1.8.55) na podstawie danych rzeczywistych zostały zamieszczone w rozdziale 6.

1.8.6. Model Milevskiego–Promisłowa i model Giacometti

Istnieje kilka innych propozycji modeli umieralności opartych na stochastycznych równaniach różniczkowych, np. model zaproponowany przez Giacometti i in. [37].

Model Giacometti z roku 2011 jest uogólnieniem propozycji Milevskiego–Promisłowa. W modelu Milevskiego–Promisłowa intensywność zgonów $\mu_x(t)$ jest przedstawiana jako proces stochastyczny postaci

$$\mu_x(t) = \mu_x(0) \exp\{\gamma t + \sigma y_x(t)\}, \quad g, \sigma, \mu_x(0) > 0, \quad (1.8.72)$$

przy czym $y_x(t)$ wyrażone jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego

$$dy_x(t) = -\beta Y_x(t)dt + dw(t), \quad y_x(0) = 0, \beta \geq 0, \quad (1.8.73)$$

gdzie $w(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$ jest procesem Wienera.

Giacometti i in. rozważali analogiczny model, rozszerzając stochastyczne równanie różniczkowe filtru. Model ten ma postać

$$\mu_x(t) = \mu_x(0) \exp\{\gamma t + \sigma y_x(t)\}, \quad g, \sigma, \mu_x(0) > 0, \quad (1.8.74)$$

$$dy_x(t) = -\beta Y_x(t)dt + f(t)dw(t), \quad y_x(0) = 0, \quad \beta \geq 0, \quad (1.8.75)$$

gdzie $f(t) \in \mathbf{R}^+$ jest funkcją niezerową i różniczkowalną na $\mathbf{R}^+$.

Estymacja modelu (1.8.74)–(1.8.75) polega na sprowadzeniu go w pierwszej kolejności do postaci dyskretnej

$$y_{x,t} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 y_{x,t-1} + \xi_t, \quad t \in \mathbf{N}, \quad (1.8.76)$$

gdzie:

$$y_{x,t} = \ln m_{x,t},$$

$$\alpha_0 = (1 - e^{-\beta}) \ln m_x(0) + \gamma e^{-\beta},$$

$$\alpha_1 = g(1 - e^{-\beta}), \quad (1.8.77)$$

$$\alpha_2 = e^{-\beta},$$

$$\xi_t = e^{\alpha t} \epsilon_t,$$

$$\epsilon_t := - \int_0^1 e^{-(\alpha+\beta)s} \sigma dw(t-s) \quad (1.8.78)$$

jest składnikiem losowym o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą 0 i wariancją

$$\text{Var}(\epsilon_t) := \frac{\sigma^2(1 - e^{-2(\alpha+\beta)})}{2(\alpha + \beta)}. \quad (1.8.79)$$

Ponadto zachodzi

$$\mathbf{E}(|\epsilon_t|^p) := 2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \text{Var}^{\frac{p}{2}}(\epsilon_t). \quad (1.8.80)$$

Parametry $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ w modelu (1.8.76) wyznaczone są metodą najmniejszych kwadratów. Następnie, z relacji (1.8.77) wyznaczone są parametry β, γ . Pozostałe dwa parametry α, σ szacowane są metodą momentów, z wykorzystaniem własności (1.8.79) i (1.8.80).

1.8.7. Uogólniony model Milevskiego–Promisłowa z wektorowym, liniowym filtrem

Jeśli w modelu Milevskiego–Promisłowa zamienimy jednowymiarowe równanie filtru wektorowym równaniem filtru, wówczas otrzymamy rozszerzony model Milevskiego–Promisłowa w postaci

$$\mu_x(t) = \mu_{x0} \exp\{\alpha_x t + \mathbf{q}_x^T \mathbf{y}(t)\}, \quad (1.8.81)$$

$$d\mathbf{y}_x(t) = \mathbf{A}_x \mathbf{y}(t) dt + \mathbf{G}_x(t) dw(t), \quad (1.8.82)$$

gdzie:

$\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ jest wektorem filtru,

$\mathbf{A}_x$ jest stałą macierzą, $n \times n$ wymiarową,

$\mathbf{q}_x \in \mathbf{R}^n$ są stałymi wektorami,

$\mathbf{G}_x(t) = [G_{x1}, \dots, G_{xn}]^T$,

$G_{xi}(t)$ są deterministycznymi, nieliniowymi funkcjami czasu, opisującymi dynamikę filtru,

α_x, μ_{x0} są pewnymi stałymi,

$w(t)$ jest skalarnym procesem Wienera.

Model (1.8.81)–(1.8.82) w postaci wektorowego, stochastycznego równania różniczkowego Itô wygląda następująco

$$dz_x(t) = [\alpha_x + \sum_{i=1}^n q_{xi} \mathbf{A}_x^i \mathbf{y}(t)] dt + \sum_{i=1}^n q_{xi} G_x^i(t) dw(t), \quad (1.8.83)$$

$$d\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}_x \mathbf{y}(t) dt + \mathbf{G}_x(t) dw(t), \quad (1.8.84)$$

gdzie:

$z_x(t) = \ln \mu_x(t)$,

$\mathbf{A}_x^i$ jest i -tym wierszem macierzy $\mathbf{A}_x$,

$q_x^i, G_x^i(t)$ są i -tymi współrzędnymi wektorów, odpowiednio $\mathbf{q}_x$ i $\mathbf{G}_x(t)$.

1.9. Uwagi końcowe

Modele dynamiczne wyrażone za pomocą prostych, stochastycznych równań różniczkowych okazały się niewystarczające do opisu procesów demograficznych. Nie nadawały się one zwłaszcza do opisu zjawisk w czasie ciągłym, ze względu na odmienne zachowanie w różnych przedziałach czasowych. To skłoniło do zaproponowania nowego rodzaju modeli, zwanych hybrydowymi, w których występuje wzajemna interakcja między ciągłą i dyskretną dynamiką. Rozdział kolejny stanowi ogólne wprowadzenie w tę tematykę, która rozwijana będzie następnie w rozdziale 3.

Rozdział 2

Statyczne i dynamiczne modele hybrydowe

2.1. Statyczne modele hybrydowe

Rozważymy rodzinę statycznych, losowych układów opisanych nieliniowymi, losowymi, wektorowymi równaniami postaci

$$\mathbf{y}(t, l, \omega) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \omega), l) \quad \mathbf{x}(t_0, \omega) = \mathbf{x}_0, \quad l \in \mathbb{S}, \quad (2.1.1)$$

gdzie:

$\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ opisuje proces wejściowy ciągły z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$,

$\mathbf{y}(t, l)$ opisuje proces wyjściowy l -tego podukładu,

$\mathbf{f}(\mathbf{0}, l) = \mathbf{0}$, $l \in \mathbb{S}$, gdzie $\mathbb{S} = \{1, \dots, N\}$ jest zbiorem stanów,

ω jest elementem przestrzeni probabilistycznej Ω .

Zakładamy, że istnieją nieujemne stałe K_l spełniające warunki

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), l)| \leq K_l |\mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \forall l \in \mathbb{S}, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (2.1.2)$$

Układ równań (2.1.1) będziemy też zapisywać w postaci

$$\mathbf{y}(t, \sigma(t), \omega) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \omega), \sigma(t)), \quad \mathbf{x}(t_0, \omega) = \mathbf{x}_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0, \quad (2.1.3)$$

gdzie $\sigma(t) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}$ jest nazywane prawem przełączeń lub sygnałem (procesem) przełączającym. Zakładamy, że $\sigma(t)$ jest niezależne od warunku początkowego $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

W analizie układów przełączających bardzo ważną rolę odgrywają procesy przełączające. W literaturze rozpatruje się trzy podstawowe typy takich procesów:

- dowolne przełączenie,
- przełączenie zależne od wartości wektora $\mathbf{x}(t)$, tzn. $\sigma(\mathbf{x}(t)) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{S}$,

- przełączenie losowe, najczęściej opisane łańcuchem Markowa, to znaczy $\sigma(t)=r(t)$ jest zadany, prawostronnie ciągłym łańcuchem Markowa, zdefiniowanym na przestrzeni Ω , przyjmującym wartości w skończonej przestrzeni stanów $\mathbb{S} = \{1, \dots, N\}$ z generatorem $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{N \times N}$, czyli

$$\mathbf{P}\{r(t+\delta)=j|r(t)=i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\delta + o(\delta) & \text{dla } i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\delta + o(\delta) & \text{dla } i = j, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

gdzie $\delta > 0$, a $\gamma_{ij} \geq 0$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j jeśli $i \neq j$, $\gamma_{ii} = -\sum_{i \neq j} \gamma_{ij}$.

Zakładamy, że łańcuch Markowa jest nieredukowalny, co oznacza, iż $\text{rank}(\Gamma) = N - 1$ i posiada jedno rozwiązanie w postaci stacjonarnego rozwiązania $\mathcal{P} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N]^T \in \mathbf{R}^N$, które może być znalezione poprzez rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Gamma = \mathbf{0}, \\ \text{gdzie } \sum_{i=1}^N p_i = 1 \text{ oraz } p_i > 0 \forall i \in \mathbb{S}. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Momenty czasu, w których występują zmiany stanu dyskretnego, to znaczy przejście od jednego modelu opisanego, np. funkcją $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), i)$ do innego modelu opisanego, np. funkcją $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), j)$, dla $i, j \in \mathbb{S}$ będziemy nazywać *czasami przełączeń* i oznaczać przez $\{\tau_j\}_{j \in \mathbf{N}}$, czyli

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j \quad (2.1.6)$$

Załóżmy, że w momencie $t = \tau_j$, $j \in \mathbf{N}$ następuje zmiana stanu dyskretnego teraźniejszego $l_{ter} = l(\tau_{j-1})$ na stan przyszły $l_{prz} = l(\tau_j)$, wówczas może nastąpić również zmiana skokowa stanu ciągłego, to znaczy

$$\mathbf{x}(\tau_j) \neq \mathbf{x}(\tau_j-). \quad (2.1.7)$$

Stan dyskretny $l(t)$ pomiędzy kolejnymi czasami przełączeń układu pozostaje stały, tzn.

$$l(t) = l_{ter} \in \mathbb{S} \quad \text{dla } t \in [\tau_{j-1}, \tau_j), \quad j \in \mathbf{N}, \quad (2.1.8)$$

wówczas zachodzi

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), l(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), l_{ter}) \quad \text{dla } t \in [\tau_{j-1}, \tau_j), \quad j \in \mathbf{N}. \quad (2.1.9)$$

Przykład 2.1. Rozpatrzmy deterministyczny, skalarny, statyczny układ hybrydowy dwustanowy, zdefiniowany za pomocą funkcji

$$f(x, 1) = a_1 \exp\{-\alpha_1 x\} + b_1, \quad (2.1.10)$$

$$f(x, 2) = a_2 \exp\{-\alpha_2 x\} + b_2, \quad x \in \mathbf{R},$$

gdzie a_i, b_i oraz $\alpha_i, i = 1, 2$ są pewnymi stałymi parametrami.

Założmy, że przełączenie z układu pierwszego na drugi następuje dla $x = \bar{x}$ i wartość końcowa pierwszego układu jest równa wartości początkowej drugiego układu, czyli

$$f(\bar{x}, 1) = a_1 \exp\{-\alpha_1 \bar{x}\} + b_1 = f(\bar{x}, 2) = a_2 \exp\{-\alpha_2 \bar{x}\} + b_2. \quad (2.1.11)$$

W przypadku gdy $b_1 = b_2$ warunek (2.1.11) jest równoważny warunkowi

$$\ln \frac{a_1}{a_2} = -\bar{x}(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (2.1.12)$$

a wyjście układu hybrydowego ma postać

$$y = \begin{cases} a_1 \exp\{-\alpha_1 x\} + b_1 & \text{dla } x \leq \bar{x}, \\ a_2 \exp\{-\alpha_2 x\} + b_2 & \text{dla } x \geq \bar{x}. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

2.2. Dynamiczne modele hybrydowe

W grupie dynamicznych modeli hybrydowych można wyróżnić dwie klasy modeli. Do pierwszej klasy zaliczamy modele, dla których znane są rozwiązania analityczne stochastycznych równań różniczkowych, rozwiązania analityczne równań momentów lub gęstości prawdopodobieństw. Mogą być one stacjonarne bądź niestacjonarne. Do drugiej grupy zaliczamy modele, których rozwiązania znajdujemy za pomocą schematów różnicowych.

Podobnie, jak w przypadku układów statycznych, stochastyczny hybrydowy układ dynamiczny przedstawimy jako rodzinę wektorowych stochastycznych równań różniczkowych Itô, opisujących dynamikę w przedziałach czasowych pomiędzy przełączeniami.

Zakładamy, że wektorowy proces stochastyczny $\mathbf{x}(t)$, będący rozwiązaniem pewnego wektorowego równania stochastycznego, startujący w chwili t_0 ze stanu $\mathbf{x}_0$, jest przełączany odpowiednio w chwilach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$.

Przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ i zakładamy, że układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami. Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli że wartość procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i jest równa wartości początkowej procesu podukładu l_i w chwili τ_i , to znaczy $\mathbf{x}(\tau_i, l_i) = \mathbf{x}(\tau_i, l_{i-1})$. Oznacza to, że proces przełączający $\sigma(t)$ jest procesem nieciągłym. Dla ilustracji posłużymy się przykładem.

Przykład 2.2. Rozpatrzmy układ hybrydowy, w którym zbiór stanów składa się z trzech elementów $\mathbb{S} = \{1, 2, 3\}$. Niech początkowym stanem będzie $l_0 = 2$, a kolejnymi stanami $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, $l_3 = 1$, $l_4 = 3$, $l_5 = 1$. Przełączenia występują w chwilach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5$. Ponadto zakładamy, że przełączenia są istotne, to znaczy stan poprzedni i następny są różne. Innymi słowy, przełączenie przykładowo ze stanu l_2 do tego samego stanu l_2 nie jest przełączeniem.

Oznaczamy jako warunki początkowe dla l -tego podukładu funkcje $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbf{R}^n$ oraz $\mathbf{g}_k : \mathbf{R}^n \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbf{R}^n$. Wektorowe stochastyczne równanie różniczkowe Itô dla l -tego podukładu ($l \in \mathbb{S}$) ma postać

$$d\mathbf{x}(t, l) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, l), l)dt + \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t, l), l)dw_k(t), \quad \mathbf{x}(t_0, l) = \mathbf{x}_{0l}, \quad (2.2.1)$$

gdzie:

$t_{0l} \in \mathbf{R}^+$ oraz $\mathbf{x}_{0l} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}, l) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_k(\mathbf{0}, l) = \mathbf{0}$, $l \in \mathbb{S}$, $k = 1, \dots, m$,

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, l) = [f_1(\mathbf{x}, l), \dots, f_n(\mathbf{x}, l)]^T$, $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}, l) = [\sigma_{k1}(\mathbf{x}, l), \dots, \sigma_{kn}(\mathbf{x}, l)]^T$, są takie, że istnieją nieujemne stałe K_l , spełniające warunki

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, l)|^2 + \sum_{k=1}^m |\mathbf{g}_k(\mathbf{x}, l)|^2 \leq K_l(1 + |\mathbf{x}|^2), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^n, \quad (2.2.2)$$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, l) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, l)| + \sum_{k=1}^m |\mathbf{g}_k(\mathbf{x}, l) - \mathbf{g}_k(\mathbf{y}, l)| \leq K_l|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}.$$

Równania (2.2.1) można przedstawić w postaci układu hybrydowego

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \sigma(t))dt + \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t), \sigma(t))dw_k(t), \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0,$$

gdzie $\sigma(t)$ jest prawem przełączania (procesem przełączania), zdefiniowanym tak samo, jak dla hybrydowych modeli statycznych.

W szczególnym przypadku układów liniowych z addytywnymi szumami, rozpatrzmy układ hybrydowy opisany wektorowym stochastycznym równaniem różniczkowym

$$d\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}_0(t, \sigma(t)) + \mathbf{A}(t, \sigma(t))\mathbf{x}(t)]dt + \sum_{k=1}^m \mathbf{G}_{k0}(t, \sigma(t))dw_k(t), \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0,$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T, \quad \mathbf{A}_0(t, l) = [a_0^1(t, l), \dots, a_0^n(t, l)]^T,$$

$$\mathbf{G}_{k0}(t, l) = [g_{k0}^1(t, l), \dots, g_{k0}^n(t, l)]^T, \text{ są } n\text{-wymiarowymi wektorami,}$$

$$\mathbf{A}(t, l) = [a_{ij}(t, l)], \quad w_k(t) \text{ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera, } i, j = 1, \dots, n, \quad l \in \mathbb{S}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$\sigma(t) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{S} \text{ jest prawem (sygnałem) przełączania oraz } \sigma_0 \in \mathbb{S},$$

$$\text{warunek początkowy } \mathbf{x}_0 \text{ jest wektorową zmienną losową, niezależną od } w_k(t), \quad k = 0, \dots, M,$$

$$a_0^i(t, l), \quad a_{ij}(t, l) \text{ i } g_{k0}^i(t, l), \text{ są ograniczonymi, mierzalnymi, deterministycznymi funkcjami zmiennej } t \in \mathbf{R}^+.$$

Wówczas rozwiązanie (silne) jest określone zależnością

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \Psi(t, t_0, \sigma(t))\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, s, \sigma(s))\mathbf{A}_0(s, \sigma(s))ds \\ & + \int_{t_0}^t \Psi(t, s, \sigma(s)) \sum_{k=1}^m \mathbf{G}_{k0}(s, \sigma(s))dw_k(s), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

gdzie macierz fundamentalna $\Psi(t, t_0, \sigma(t))$ o wymiarach $n \times n$ jest zdefiniowana poprzez odpowiednie macierze fundamentalne $\Psi(t, t_{0l}, l)$, $l \in \mathbb{S}$ dla podukładów, to znaczy równania jednorodne

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t, l)}{dt} &= \mathbf{A}(t, l)\mathbf{x}(t, l), \\ \mathbf{x}(t_{0l}, l) &= \mathbf{x}_{0l}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

W szczególności, gdy $\mathbf{A}(t, l) = \mathbf{A}(l)$ są macierzami stałymi, wówczas w przedziale czasu $t - t_{0l}$, gdy działa l -ty podukład, zachodzi zależność

$$\begin{aligned} \Psi(t, t_{0l}, l) &= \Psi(t - t_{0l}, l) = \exp \{ \mathbf{A}(l)(t - t_{0l}) \} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathbf{A}^j(l)(t - t_{0l})^j. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Zależność (2.2.5) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, l) = & \exp \{ \mathbf{A}(l)(t - t_{0l}) \} \mathbf{x}_{0l} + \int_{t_{0l}}^t \exp \{ \mathbf{A}(l)(t - s) \} \mathbf{A}_0(s, l) ds + \\ & + \int_{t_{0l}}^t \exp \{ \mathbf{A}(l)(t - s) \} \sum_{k=1}^m \mathbf{G}_{k0}(s, l) d\boldsymbol{\xi}(s). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Założmy, że chwile przełączeń wystąpiły odpowiednio w momentach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$. Przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ i układ hybrydowy pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach $l_i, i = 1, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami. Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, to znaczy $\mathbf{x}(\tau_i, l_i) = \mathbf{x}(\tau_i, l_{i-1})$. Wówczas otrzymamy następujące rozwiązanie układu hybrydowego (2.2.4), uproszczonego do postaci (2.2.8) dla $\mathbf{A}_0(s, l) = \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}(t, l_1) = \exp \{ \mathbf{A}(l_1)(t - t_0) \} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp \{ \mathbf{A}(l_1)(t - s) \} \sum_{k=1}^m \mathbf{G}_{k0}(s, l_1) d\boldsymbol{\xi}(s)$$

$$\text{dla } t \in [\tau_0, \tau_1],$$

$$\mathbf{x}(t, l_2) = \exp \{ \mathbf{A}(l_2)(t - \tau_1) \} \mathbf{x}(\tau_1, l_1) + \int_{\tau_1}^t \exp \{ \mathbf{A}(l_2)(t - s) \} \sum_{k=1}^m \mathbf{G}_{k0}(s, l_2) d\boldsymbol{\xi}(s)$$

$$\text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2],$$

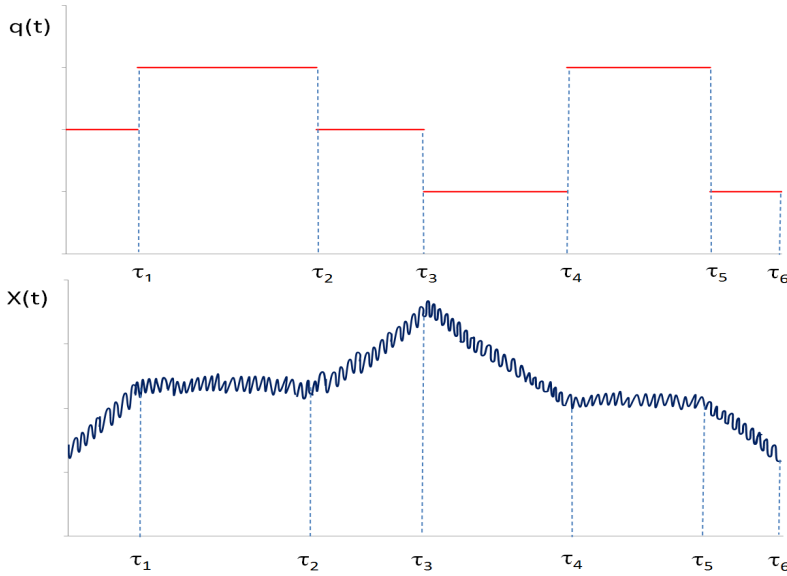
⋮

$$\mathbf{x}(t, l_k) = \exp \{ \mathbf{A}(l_k)(t - \tau_{k-1}) \} \mathbf{x}(\tau_{k-1}, l_{k-1}) + \int_{\tau_{k-1}}^t \exp \{ \mathbf{A}(l_k)(t - s) \} \sum_{k=1}^m \mathbf{G}_{k0}(s, l_k) d\boldsymbol{\xi}(s)$$

$$\text{dla } t \in [\tau_{k-1}, \tau_k].$$

Przykładowy proces przełączania $q(t)$ i układ dynamiczny $X(t)$ przedstawiono na rysunku 2.1.

W przypadku układów liniowych z parametrycznymi szumami nie można znaleźć rozwiązania równania stochastycznego w jawnej postaci, z wyjątkiem przypadku skalarne.



Rys. 2.1. Ilustracja trajektorii procesu przełączania i układu dynamicznego

Źródło: opracowanie własne

Skalarny układ hybrydowy jednorodny

Rozważmy układ hybrydowy, liniowy, skalarny z M -krotnym przełączeniem, opisany jako rodzina jednorodnych stochastycznych równań Itô

$$dx(t, l_i) = a(t, l_i)x(t, l_i)dt + g(t, l_i)x(t, l_i)dw(t), \quad (2.2.9)$$

$$x(\tau_i, l_i) = x(\tau_i, l_{i-1}), \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{dla } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i],$$

gdzie:

$t \in [t_0, \infty)$, $a(t, l_i)$ oraz $g(t, l_i)$, $i = 1, \dots, M$ są pewnymi nieliniowymi funkcjami zmiennej t ,

warunek początkowy $x(\tau_i, l_{i-1})$ jest zmienną losową, niezależną od standardowego procesu Wienera $w(t)$.

Zakładamy, że chwile przełączeń wystąpiły odpowiednio w $\tau_1, \dots, \tau_M$ oraz że $\tau_0 = t_0$ i układ hybrydowy pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 1, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągiem. Zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli $x(\tau_i, l_i) = x(\tau_i, l_{i-1})$.

Korzystając z formuły Itô, można wykazać, że rozwiązanie (2.2.9) jest procesem stochastycznym

$$x(t, l_i) = \psi(t, \tau_i, l_i) x(\tau_i, l_{i-1}),$$

gdzie

$$\psi(t, \tau_i, l_i) = \exp \int_{\tau_i}^t a(s, l_i) - \frac{g^2(s, l_i)}{2} ds + \int_{\tau_i}^t g(s, l_i) dw(s) \quad (2.2.10)$$

Z (2.2.10) wynika, że wartość rozwiązania równania, na przykład po M przełączeniach, wynosi

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi(t, \tau_M, l_M) \dots \psi(\tau_2, \tau_1, l_1) \psi(\tau_1, \tau_0, l_0) x(\tau_0) = \\ &= \exp \int_{\tau_M}^t a(s, l_M) - \frac{g^2(s, l_M)}{2} ds + \int_{\tau_M}^t g(s, l_M) dw(s) + \\ &+ \left\{ \sum_{i=1}^M \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} a(s, l_i) - \frac{g^2(s, l_i)}{2} ds + \sum_{i=1}^M \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} g(s, l_i) dw(s) \right\} x(\tau_0). \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Skalarny układ hybrydowy niejednorodny

Rozważmy układ hybrydowy, liniowy, skalarny z M -krotnym przełączeniem, opisany jako rodzina stochastycznych równań Itô

$$dx(t, l_i) = [a(t, l_i)x(t, l_i) + b(t, l_i)]dt + [g(t, l_i)x(t, l_i) + q(t, l_i)]dw(t), \quad (2.2.12)$$

$$x(\tau_i, l_i) = x(\tau_i, l_{i-1}), \quad i = 1, \dots, M \text{ dla } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i],$$

gdzie $t \in [t_0, \infty)$, $b(t, l_i)$ oraz $q(t, l_i)$, $i = 1, \dots, M$ są pewnymi nieliniowymi funkcjami czasu t ; wszystkie pozostałe oznaczenia są takie same jak w równaniu (2.2.9). Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, to znaczy $x(\tau_{i-1}, l_i) = x(\tau_{i-1}, l_{i-1})$. Wówczas rozwiązanie układu ma postać

$$\begin{aligned} x(t, l_i) &= \psi(t, \tau_{i-1}, l_i) x(\tau_{i-1}, l_{i-1}) + \int_{\tau_{i-1}}^t [\psi(s, \tau_{i-1}, l_i)]^{-1} q(s, l_i) dw(s) + \\ &+ \int_{\tau_{i-1}}^t [\psi(s, \tau_{i-1}, l_i)]^{-1} [b(s, l_i) - q(s, l_i)g(s, l_i)] ds \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\text{dla } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = 1, \dots, M.$$

Po rozpisaniu (2.2.13) na podprzedziały otrzymujemy

$$x(t, l_1) = \psi(t, \tau_0, l_1) x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t [\psi(s, \tau_0, l_1)]^{-1} [b(s, l_1) - q(s, l_1)g(s, l_1)] ds + \\ + \int_{\tau_0}^t [\psi(s, \tau_0, l_1)]^{-1} q(s, l_1) dw(s) \quad , \quad \text{dla } t \in [\tau_0, \tau_1],$$

$$x(t, l_2) = \psi(t, \tau_1, l_2) x(\tau_1, l_1) + \int_{\tau_1}^t [\psi(s, \tau_1, l_2)]^{-1} [b(s, l_2) - q(s, l_2)g(s, l_2)] ds + \\ + \int_{\tau_1}^t [\psi(s, \tau_1, l_2)]^{-1} q(s, l_2) dw(s) \quad , \quad \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2],$$

$\vdots$

$$x(t, l_{M-1}) = \psi(t, \tau_{M-1}, l_{M-1}) \{x(\tau_{M-1}, l_{M-1}) + \\ + \int_{\tau_{M-1}}^t [\psi(s, \tau_{M-1}, l_{M-1})]^{-1} [b(s, l_{M-1}) - q(s, l_{M-1})g(s, l_{M-1})] ds + \\ + \int_{\tau_{M-1}}^t [\psi(s, \tau_{M-1}, l_{M-1})]^{-1} q(s, l_{M-1}) dw(s) \quad , \text{dla } t \in [\tau_{M-1}, \tau_M],$$

$$x(t, l_M) = \psi(t, \tau_M, l_M) \{x(\tau_M, l_M) + \\ + \int_{\tau_M}^t [\psi(s, \tau_M, l_M)]^{-1} [b(s, l_M) - q(s, l_M)g(s, l_M)] ds + \\ + \int_{\tau_M}^t [\psi(s, \tau_M, l_M)]^{-1} q(s, l_M) dw(s) \quad , \text{dla } t > \tau_M.$$

2.3. Momentowe modele hybrydowe

Jeśli nie można znaleźć rozwiązań *explicite* równań (2.2.1), wówczas wygodnym narzędziem w analizie stochastycznego układu hybrydowego są równania momentów. Rozpatrzmy je dla układów liniowych z addytywnymi i parametrycznymi wymuszeniami dla dowolnych przełączeń. Będziemy zatem rozważać hybrydowe, liniowe, wektorowe równanie stochastyczne Itô z wymuszeniami addytywnymi i parametrycznymi oraz z dowolnymi przełączeniami.

Modele te mają postać

$$d\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}_0(t, \sigma(t)) + \mathbf{A}(t, \sigma(t))\mathbf{x}(t)]dt + \\ + \sum_{k=1}^m [\mathbf{G}_{k0}(t, \sigma(t)) + \mathbf{G}_k(t, \sigma(t))\mathbf{x}(t)]dw_k(t), \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0,$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{A}_0(t, \sigma(t)) = [a_0^1(t, \sigma(t)), \dots, a_0^n(t, \sigma(t))]^T,$$

$$\mathbf{G}_{k0}(t) = [\sigma_{k0}^1(t, \sigma(t)), \dots, \sigma_{k0}^n(t, \sigma(t))]^T, \text{ są } n\text{-wymiarowymi wektorami,}$$

$$\mathbf{A}(t, \sigma(t)) = [a_{pj}(t, \sigma(t))], \quad \mathbf{G}_k(t, \sigma(t)) = [\sigma_{kj}^p(t, \sigma(t))], \text{ są macierzami}$$

o wymiarach $n \times n$,

$$w_k(t) \text{ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera, } p, j = 1, \dots, n, \\ k = 1, \dots, m,$$

$$\text{warunek początkowy } \mathbf{x}_0 \text{ jest wektorową zmienną losową, niezależną od } \\ w_k(t), \quad k = 1, \dots, m,$$

$$a_0^i, a_{ij} \text{ i } \sigma_{k0}^i \text{ są ograniczonymi, mierzalnymi, deterministycznymi funk-} \\ \text{cjami zmiennej } t \in [0, \infty).$$

Dla uproszczenia założmy, że warunek początkowy $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, \dots, x_{0n}]^T$ jest pewną zmienną losową niezależną od $w_k(t)$.

Korzystając z formuły Itô i operacji uśredniania, otrzymamy równania dla wartości średnich oraz momentów drugiego rzędu dla l_i -tego podukładu

$$\frac{d\mathbf{m}(t, l_i)}{dt} = \mathbf{A}_0(t, l_i) + \mathbf{A}(t, l_i)\mathbf{m}(t, l_i), \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{m}(\tau_i, l_i) = \mathbf{m}(\tau_i, l_{i-1}), \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma(t, l_i)}{dt} &= \mathbf{m}(t, l_i) \mathbf{A}_0^T(t, l_i) + \mathbf{A}_0(t, l_i) \mathbf{m}^T(t, l_i) + \\
&+ \Gamma(t, l_i) \mathbf{A}^T(t, l_i) + \mathbf{A}(t, l_i) \Gamma(t, l_i) + \\
&+ \sum_{k=1}^m [\mathbf{G}_{k0}(t, l_i) \mathbf{G}_{k0}^T(t, l_i) + \mathbf{G}_k(t, l_i) \mathbf{m}(t, l_i) \mathbf{G}_{k0}(t, l_i) + \\
&+ \mathbf{G}_{k0}(t, l_i) \mathbf{m}^T(t, l_i) \mathbf{G}_k^T(t, l_i) + \mathbf{G}_k(t, l_i) \Gamma(t, l_i) \mathbf{G}_k^T(t, l_i)],
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$\Gamma(\tau_i, l_i) = \Gamma_0(\tau_i, l_{i-1}), \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots$$

gdzie

$$\mathbf{m}(t, l_i) = E[\mathbf{x}(t, l_i)], \quad \Gamma(t, l_i) = E[\mathbf{x}(t, l_i) \mathbf{x}^T(t, l_i)],$$

$$\mathbf{m}(\tau_0, l_0) = E[\mathbf{x}(\tau_0, l_0)], \quad \Gamma(\tau_0, l_0) = E[\mathbf{x}(\tau_0, l_0) \mathbf{x}^T(\tau_0, l_0)].$$

Równania (2.3.2) i (2.3.3) dla współrzędnych mają postać

$$\frac{dm_p(t, l_i)}{dt} = a_0^p(t, l_i) + \sum_{j=1}^n a_{pj}(t, l_i) m_j(t, l_i), \tag{2.3.4}$$

$$\mathbf{m}_p(\tau_i, l_i) = \mathbf{m}_p(\tau_i, l_{i-1}), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad p = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_{pj}(t, l_i)}{dt} &= a_0^p(t, l_i) m_j(t, l_i) + a_0^j(t, l_i) m_p(t, l_i) + \\
&+ \sum_{q=1}^n [a_{pq}(t, l_i) \Gamma_{qj}(t, l_i) + a_{jq}(t, l_i) \Gamma_{qp}(t, l_i)] + \\
&+ \sum_{k=1}^m \sigma_{k0}^p(t, l_i) \sigma_{k0}^j(t, l_i) + \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha=1}^n [\sigma_{k\alpha}^i(t, l_i) \sigma_{k0}^j(t, l_i) m_\alpha(t, l_i) + \\
&+ \sigma_{k\alpha}^j(t, l_i) \sigma_{k0}^p(t, l_i) m_\alpha(t, l_i)] + \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sigma_{k\alpha}^p(t, l_i) \sigma_{k\alpha}^j(t, l_i) \Gamma_{\alpha\beta}(t, l_i),
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{pj}(\tau_0, l_0) = \Gamma_{pj0}, \quad p, j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots \text{ dla } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad (2.3.5)$$

gdzie

$$m_p(t, l_i) = E[x_p(t, l_i)], \quad \Gamma_{pj}(t, l_i) = E[x_p(t, l_i)x_j(t, l_i)],$$

$$m_{p0} = E[x_p(t_0, l_0)], \quad \Gamma_{pj0} = E[x_p(t_0, l_0)x_j(t_0, l_0)].$$

Zauważmy, że otrzymane równania momentów mają zamkniętą postać, to znaczy po prawej stronie równań nie ma momentów wyższych rzędów niż występują po lewej stronie, a ponadto momenty drugiego rzędu zależą jedynie od zmiennej t .

Przykład 2.3. Rozważmy skalarny układ hybrydowy o parametrycznych i addytywnych wymuszeniach stochastycznych z losowym warunkiem początkowym, opisany za pomocą rodziny równań skalarnych liniowych Itô

$$dx(t, l_i) = [a_0(l_i) + a(l_i)x(t, l_i)]dt + [b_0(l_i) + b(l_i)x(t, l_i)]dw(t), \quad (2.3.6)$$

$$x(\tau_i, l_i) = x(\tau_i, l_{i-1}), \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{dla } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i],$$

gdzie $t \in [t_0, \infty)$, $a_0(l_i), a(l_i), b_0(l_i)$ oraz $b(l_i)$, $i = 1, \dots, M$ są pewnymi stałymi, warunek początkowy $x(\tau_{i-1}, 0)$ jest zmienną losową niezależną od standardowego procesu Wienera $w(t)$, $E[x(\tau_{i-1}, 0)] = m_0$, $E[x^2(\tau_{i-1}, 0)] = v_0$.

Zakładamy, że chwile przełączeń wystąpiły odpowiednio w $\tau_1, \dots, \tau_M$ oraz przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ i układ hybrydowy pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 1, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami. Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, to znaczy $x(\tau_i, l_i) = x(\tau_i, l_{i-1})$. Korzystając z formuły Itô, można wykazać, że równania momentów pierwszego i drugiego rzędu, odpowiednio dla

$$m(t) = E[x(t)], \quad \Gamma(t) = E[x^2(t)],$$

spełniają następujące równania różniczkowe

$$\frac{dm(t, l_i)}{dt} = a_0(l_i) + a(l_i)m(t, l_i), \quad (2.3.7)$$

$$m(\tau_i, l_i) = m(\tau_i, l_{i-1}), \quad i = 1, \dots, M \text{ dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t, l_i)}{dt} = & 2a_0(l_i)m(t, l_i) + 2a(l_i)\Gamma(t, l_i) + b_0^2(l_i) + \\ & + 2b_0(l_i)b(l_i)m + b_0(l_i)\Gamma(t, l_i), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\Gamma(\tau_i, l_i) = \Gamma(\tau_i, l_{i-1}), \quad i = 1, \dots, M \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Rozwiązując układ równań (2.3.7)–(2.3.8), otrzymamy odpowiednio

$$m(t, l_i) = -\frac{a_0(l_i)}{a(l_i)} + m(\tau_i, l_i) + \frac{a_0(l_i)}{a(l_i)} \exp\{a(l_i)(t - \tau_i)\}, \quad (2.3.9)$$

$$i = 1, \dots, M \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t, l_i) = & -A_1 - A_2 \exp\{a(l_i)(t - \tau_i)\} + \\ & + \Gamma^2(\tau_i, l_i) + A_1 + A_2 \exp(2a(l_i) + b^2(l_i))(t - \tau_i), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$i = 1, \dots, M \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{b_0^2(l_i) - \frac{a_0(l_i)}{a(l_i)}(2a_0(l_i) + 2b_0(l_i)b(l_i))}{2a(l_i) + b^2(l_i)}, \\ A_2 = & \frac{\left(m(\tau_i, l_i) + \frac{a_0(l_i)}{a(l_i)}\right)(2a_0(l_i) + 2b_0(l_i)b(l_i))}{a(l_i) + b^2(l_i)}, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

$$i = 1, \dots, M \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Przykład 2.4. Rozważmy równanie hybrydowego oscylatora liniowego o współczynnikach i wymuszeniach deterministycznych i stochastycznych,

z deterministycznym warunkiem początkowym, opisane hybrydowym liniowym wektorowym równaniem Itô

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_0(\sigma(t)) + \mathbf{A}(\sigma(t))\mathbf{x}(t)]dt + \\ + \sum_{k=0}^2 [\mathbf{G}_{k0}(\sigma(t)) + \mathbf{G}_k(\sigma(t))\mathbf{x}(t)]dw_k(t), \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \sigma(t_0) = \sigma_0,$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0(l) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_{0l} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(l) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{0l}^2 & -2\zeta_l\lambda_{0l} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{10}(l) = \mathbf{G}_{20}(l) = \mathbf{G}_0(l) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{G}_{00}(l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{0l} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_1(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_{1l} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2l} \end{pmatrix}.$$

Ponadto, λ_{0l} , ζ_l , a_{0l} , σ_{0l} , σ_{1l} oraz σ_{2l} , $l = 1, 2$ są stałymi parametrami, $w_0(t)$, $w_1(t)$ oraz $w_2(t)$ są niezależnymi procesami Wienera, natomiast warunki początkowe x_{10} oraz x_{20} są zmiennymi losowymi, niezależnymi od $w_k(t)$, $k = 0, 1, 2$.

Równania momentów pierwszego i drugiego rzędu dla l_i -tego podukładu mają postać

$$\begin{aligned}
 \frac{dm_1(t, l_i)}{dt} &= m_2(t, l_i), \\
 \frac{dm_2(t, l_i)}{dt} &= -\lambda_{0l_i}^2 m_1(t, l_i) - 2\zeta_{l_i} \lambda_{0l_i} m_2(t, l_i) - a_{0l_i}, \\
 \frac{d\Gamma_{11}(t, l_i)}{dt} &= 2\Gamma_{12}(t, l_i), \\
 \frac{d\Gamma_{12}(t, l_i)}{dt} &= \Gamma_{22}(t, l_i) - a_{0l_i} m_1(t, l_i) - 2\zeta_{l_i} \lambda_{0l_i} \Gamma_{12}(t, l_i) + \\
 &\quad - \lambda_{0l_i}^2 \Gamma_{11}(t, l_i), \\
 \frac{d\Gamma_{22}(t, l_i)}{dt} &= -2a_{0l_i} m_2(t, l_i) - 4\zeta_{l_i} \lambda_{0l_i} \Gamma_{22}(t, l_i) + \sigma_{0l_i}^2 + \\
 &\quad - 2\lambda_{0l_i}^2 \Gamma_{12}(t, l_i) + \sigma_{1l_i}^2 \Gamma_{11}(t, l_i) + \sigma_{2l_i}^2 \Gamma_{22}(t, l_i),
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

gdzie

$$m_p(t, l_i) = E[x_p(t, l_i)],$$

$$\Gamma_{pj}(t, l_i) = E[x_p(t, l_i)x_j(t, l_i)], \quad p, j = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Z uwagi na to, że równania momentów (2.3.2) tworzą układ równań liniowych, deterministycznych, rozwiązanie analityczne tego układu istnieje i ma postać

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}(t, l_i) &= \exp \int_{\tau_i}^t \mathbf{A}(s, l_i) ds \quad \mathbf{m}(\tau_i, l_{i-1}) + \\
 &+ \int_{\tau_i}^t \exp \int_s^t \mathbf{A}(u, l_i) du \quad \mathbf{A}_0(s, l_i) ds,
 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

$$\mathbf{m}(\tau_i, l_i) = \mathbf{m}(\tau_i, l_{i-1}), \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Aby w podobny sposób rozwiązać układ równań momentów (2.3.3), trzeba najpierw zamienić równanie macierzowe (2.3.3) na odpowiadające mu deterministyczne równanie wektorowe. W tym celu użyjemy oznaczenia literaturowego $sc\mathbf{A}$, określającego wektor kolumnowy, utworzony z wektorów kolumnowych macierzy $\mathbf{A}$, to znaczy

$$sc\mathbf{A} = ||[\mathbf{A}^{(\alpha)}]|| \quad (2.3.15)$$

Iloczynem kroneckerowskim macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nazywamy macierz $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ zdefiniowaną następująco

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & A_{12}\mathbf{B} & \dots & A_{1n}\mathbf{B} \\ A_{21}\mathbf{B} & A_{22}\mathbf{B} & \dots & A_{2n}\mathbf{B} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}\mathbf{B} & A_{m2}\mathbf{B} & \dots & A_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} sc\Gamma(t, l_i) = & \exp \int_{\tau_i}^t \mathcal{A}(s, l_i) ds \quad sc\Gamma(\tau_i, l_{i-1}) + \\ & + \int_{\tau_i}^t \exp \int_s^t \mathcal{A}(u, l_i) du \quad sc\mathcal{Q}_0(s, l_i) ds, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$sc\Gamma(\tau_i, l_i) = sc\Gamma(\tau_i, l_{i-1}), \quad \text{dla } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

gdzie

$$\mathcal{A}(s, l_i) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}(s, l_i) + \mathbf{A}(s, l_i) \otimes \mathbf{I} + \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_k(s, l_i) \otimes \mathbf{G}_k(s, l_i), \quad (2.3.18)$$

$$sc\mathcal{Q}_0(s, l_i) = sc \quad (\mathbf{A}_0(s, l_i) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{m}))(\mathbf{A}_0(s, l_i) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{m}))^T, \quad (2.3.19)$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{m}) = \left[\sum_{j=1}^n \sigma_{kj}^p(s, l_i) m_j(s, l_i) \right]. \quad (2.3.20)$$

2.4. Uwagi końcowe

Zaprezentowana w tym rozdziale metodologia dotycząca dynamicznych modeli hybrydowych zostanie wykorzystana w kolejnym rozdziale, poświęconym hybrydowym modelom umieralności.

Rozdział 3

Dynamiczne, hybrydowe modele umieralności

3.1. Wprowadzenie

Naturalnym uogólnieniem rodziny modeli (1.8.39) do rodziny hybrydowych modeli umieralności jest zdefiniowanie ich dla wyodrębnionych podukładów $l \in \mathbb{S}$, np. dla pewnych przedziałów czasowych, w których dany model „działa” na podstawie tego samego zestawu parametrów.

Dla przykładu, przez analogię do (1.8.39), hybrydowe modele statyczne mogą być zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned}\log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \beta_x(l)\kappa_t(l), \\ \log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \beta_x(l)\kappa_t(l) + \gamma_{t-x}(l), \\ \log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \beta_x(l)\kappa_t(l) + \beta_x^{(0)}(l)\gamma_{t-x}(l), \\ \log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + (x_c - x)^+\kappa_t^{(3)}(l), \\ \log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + (x_c - x)^+\kappa_t^{(3)}(l) + \gamma_{t-x}(l), \\ \log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + (x_c - x)^+\kappa_t^{(3)}(l) + \\ &\quad + v_x\kappa_t^{(4)}(l) + \gamma_{t-x}(l), \\ \log m_x(t, l) &= \alpha_x(l) + \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + (x_c - x)^+\kappa_t^{(3)}(l) + \\ &\quad + (x_c - x)\gamma_{t-x}(l), \\ \eta_{x,t}(l) &= \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l), \\ \eta_{x,t}(l) &= \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + \gamma_{t-x}(l), \\ \eta_{x,t}(l) &= \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + v_x\kappa_t^{(3)}(l) + \gamma_{t-x}(l), \\ \eta_{x,t}(l) &= \kappa_t^{(1)}(l) + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}(l) + (x_c - x)\gamma_{t-x}(l),\end{aligned}$$

gdzie x_c jest pewnym ustalonym parametrem, $\kappa_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, oraz γ_{t-x} są pewnymi procesami losowymi, które modelujemy za pomocą odpowiednich procesów ARIMA.

Pozostała część tego rozdziału poświęcona została uogólnieniom modeli umieralności, opartym na dynamicznych modelach hybrydowych.

Natężenie umieralności $\mu_x(t, l)$ w chwili t dla osób w wieku x oraz dla l -tego podukładu ($l \in \mathbb{S}$), będzie traktowane w tych modelach jako rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego o ogólnej postaci

$$d\mu_x(t, l) = a(x, t, \mu_x(t, l), l)dt + b(x, t, \mu_x(t, l), l)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}. \quad (3.1.1)$$

3.2. Skalarny, hybrydowy model Vasička

Rodzina podukładów opisujących skalarny hybrydowy model Vasička ma postać [112] taką jak równanie (1.8.45)

$$d\mu_x(t, l) = [k_l(\theta_l) - \mu_x(t, l)] dt + q_l dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.2.1)$$

gdzie wielkości $\mu(0, l)$, q_l są dodatnimi stałymi, natomiast $\theta_l > 0$ i $k_l < 0$ są dobranymi parametrami.

Jeśli chwilą początkową będzie $\tau_0 < t$, a kolejnymi chwilami przełączeń będą czasy $t < \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M < T$, to formuła na prawdopodobieństwo przeżycia w hybrydowym modelu Vasička dla l -tego podukładu ma postać

$$S_x(t, \tau_l) = G_\mu(t, \tau_l) \exp\{-H_\mu(t, \tau_l)\mu_x(t, l)\}, \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.2.2)$$

gdzie

$$G_\mu(t, \tau_l) = \exp \left[\theta_l - \frac{q_l^2}{2k_l^2} [H_\mu(t, \tau_l) - \bar{\tau}(t, \tau_l)] - \frac{q_l^2}{4k_l} H_\mu(t, \tau_l) \right],$$

$$H_\mu(t, \tau_l) = \frac{1}{k_l} [1 - \exp\{-k_l \bar{\tau}(t, \tau_l)\}],$$

$\bar{\tau}(t, \tau_l)$ jest miarą czasową określającą część roku między momentami t i τ_l dla l -tego podukładu (w zgodzie z pewną konwencją).

3.3. Skalarny, hybrydowy model Coxa–Ingersolla–Rossa

Zbiór podukładów opisujących skalarny, hybrydowy model Coxa–Ingersolla–Rossa [29] ma postać taką, jak równanie (1.8.46), (1.8.49)

$$d\mu_x(t, l) = [k_l(\theta - \mu_x(t, l))] dt + q_l \overline{\mu_x(t, l)} dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.3.1)$$

gdzie $\mu(0, l)$, q_l są dodatnimi stałymi, $\theta_l > 0$ i $k_l < 0$ są dobranymi parametrami.

Prawdopodobieństwo przeżycia w l -tym podukładzie modelu Coxa–Ingersolla–Rossa w przedziale czasowym (t, τ_l) ma postać

$$S_x(t, \tau_l) = G_\mu(t, \tau_l) \exp\{-H_\mu(t, \tau_l)\mu_x(t, l)\}, \quad l \in \mathbb{S},$$

gdzie

$$G_\mu(t, \tau_l) = \frac{2\delta_l \exp \frac{1}{2}(k_l + \delta_l)\bar{\tau}(t, \tau_l)}{2\delta_l + (k_l + \delta_l)(\exp\{\delta_l\bar{\tau}(t, \tau_l)\} - 1)}^{\frac{2k_l\theta_l}{q_l^2}},$$

$$H_\mu(t, \tau_l) = \frac{2(\exp\{\delta_l\tau(t, \tau_l)\} - 1)}{2\delta_l + (k_l + \delta_l)(\exp\{\delta_l\bar{\tau}(t, \tau_l)\} - 1)},$$

$$\delta_l = \sqrt{k_l^2 + 2q_l^2},$$

$\bar{\tau}(t, \tau_l)$ jest miarą czasową określającą część roku między momentami t i τ_l dla l -tego podukładu (w zgodzie z pewną konwencją).

3.4. Skalarny, hybrydowy model Lee–Cartera

Rodzina podukładów opisujących skalarny, hybrydowy model typu Lee–Cartera ma postać [65], [66] taką jak równania (1.8.54), (1.8.55)

$$d\mu_x(t, l) = \alpha_x(t, l) + \frac{1}{2}\sigma_x^2(l) \mu_x(t, l)dt + \sigma_x(l)\mu_x(t, l)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.4.1)$$

gdzie

$$\alpha_x(t, l) = b_x(l)\kappa'(t, l), \quad (3.4.2)$$

$$\mu_x(0) = \exp\{a_x(l) + b_x(l)\kappa(0, l)\}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

$a_x(l)$, $b_x(l)$ oraz $\sigma_x(l)$ są stałymi parametrami modeli, $\kappa(t, l)$ są skalarnymi, różniczkowalnymi i deterministycznymi funkcjami czasu t , $w(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Rozwiązanie równania (3.4.1) jest następujące

$$\ln \mu_x(t, l) = a_x(l) + b_x(l)\kappa(t, l) + \sigma_x(l)w(t), \quad l \in \mathbb{S} \quad (3.4.3)$$

lub w postaci wykładniczej

$$\mu_x(t, l) = \exp\{a_x(l) + \beta_x(l)\kappa(t, l) + \sigma_x(l)w(t)\}, \quad l \in \mathbb{S}. \quad (3.4.4)$$

3.5. Uogólniony, skalarny, hybrydowy model Lee–Cartera

Rodzina podukładów opisujących uogólniony, skalarny i hybrydowy model Lee–Cartera ma postać [92]

$$d\mu_x(t, l) = \alpha_x(t, l) + \frac{1}{2}q_x^2(l) \mu_x(t, l)dt + \sigma_x(l)\mu_x(t, l)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.5.1)$$

gdzie

$$\alpha_x(t, l) = b_x \kappa'(t, l), \quad (3.5.2)$$

$$\mu_x(0) = \exp\{a_x(l) + b_x(l)\kappa(0, l)\}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

$a_x(l)$, $b_x(l)$ oraz $\sigma_x(l)$ są parametrami modeli zależnymi od wieku x , $q_x^2(l)$ są członami korekcyjnymi, $\kappa(t, l)$ są skalarnymi, różniczkowalnymi i deterministycznymi funkcjami czasu t , natomiast $\kappa(0, l)$ to stałe parametry.

W proponowanym uogólnionym modelu wprowadziliśmy dwa parametry $q_x^2(l)$ i $\kappa(t, l)$. Wprowadzenie parametru $q_x^2(l)$ wynika z definicji rodziny całek stochastycznych. Stochastyczne równania różniczkowe Itô i Stratonowicza, odpowiadające definicjom całek stochastycznych Itô i Stratonowicza, przybierają postać odpowiednio

$$d\mu_x(t, l) = \alpha_x(t, l)\mu_x(t, l)dt + \sigma_x(l)\mu_x(t, l)dw(t), \quad (3.5.3)$$

oraz

$$d\mu_x(t, l) = \alpha_x(t, l) + \frac{1}{2}\sigma_x^2(l) \mu_x(t, l)dt + \sigma_x(l)\mu_x(t, l)dw(t). \quad (3.5.4)$$

Wyrażenie $\frac{1}{2}\sigma_x^2$ może być traktowane jako „poprawka” Stratonowicza. W ogólnym przypadku, człon poprawkowy zależy od definicji całki stochastycznej i można założyć, że jest postaci $\frac{1}{2}q_x^2$. Interpretacja proponowanego członu korekcyjnego dla realnych procesów fizycznych jest związana z interpretacją aproksymacji białego szumu, który w rzeczywistości nie istnieje, a jest jedynie abstrakcyjnym procesem – wygodnym narzędziem matematycznym. Rzeczywistym procesem fizycznym, aproksymującym biały szum, jest szum kolorowy (stacjonarny, szerokopasmowy proces). Ten problem był szczegółowo dyskutowany w literaturze w odniesieniu do różnych procesów fizycznych np. [103], [110], [100]. Brak jest natomiast interpretacji wyrażenia q_x^2 dla modelu demograficznego.

Będziemy zakładać, że funkcja $\kappa(t)$ ma postać funkcji liniowej czasu i jest różna dla różnych podukładów. W bardziej złożonych modelach funkcje $\kappa_i(t)$ dla różnych podukładów przyjmą bardziej złożone formuły.

Rozwiązanie równania (3.5.1) dla każdego $l \in \mathbb{S}$ jest następujące

$$\mu_x(t, l) = \exp \left[a_x(l) + \beta_x(l)\kappa(t, l) + \frac{1}{2}(q_x^2(l) - \sigma_x^2(l))t + \sigma_x(l)w(t) \right] \quad (3.5.5)$$

Otrzymane rozwiązania dla podukładów wykorzystamy do konstrukcji rozwiązania modelu hybrydowego.

Zakładamy, że skalarne procesy stochastyczne $\mu_x(t, l)$, będące rozwiązaniami skalarnego, hybrydowego równania stochastycznego, startujący w chwili t_0 ze stanu początkowego x_0 jest przełączany odpowiednio w chwilach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ oraz przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$. Zakładamy, że układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami.

Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli wartość procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i jest równa wartości początkowej procesu podukładu l_i w chwili τ_i , to znaczy $\mu_x(\tau_i, l_i) = \mu_x(\tau_i, l_{i-1})$. Wówczas rozwiązanie wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mu_x(t, l_k) = & \mu_x(\tau_k, l_{k-1}) \exp \{ \beta_x(l_k)(\kappa(t, l_k) - \kappa(\tau_k, l_k)) + \\ & + \frac{1}{2}(q_x^2(l_k) - \sigma_x^2(l_k))(t - \tau_k) + \sigma_x(l_k)(w(t) - w(\tau_k)) \} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

$$\text{dla } t \in [\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Rodzina momentów pierwszego i drugiego stopnia podukładów opisujących uogólniony, skalarne hybrydowy model Lee–Cartera ma postać

$$\frac{dE[\mu_x(t, l)]}{dt} = \alpha_x(t, l) + \frac{1}{2}q_x^2(l) E[\mu_x(t, l)], \quad (3.5.7)$$

$$\frac{dE[\mu_x^2(t, l)]}{dt} = 2\alpha_x(t, l) + q_x^2(l) + \sigma_x^2(l) E[\mu_x^2(t, l)]. \quad (3.5.8)$$

Rozwiązanie równań (3.5.7) i (3.5.8) dla każdego $l \in \mathbb{S}$ są następujące

$$E[\mu_x(t, l)] = \exp \left[a_x(l) + \beta_x(l)\kappa(t, l) + \frac{1}{2}q_x^2(l)t \right], \quad (3.5.9)$$

$$E[\mu_x^2(t, l)] = \exp \quad 2a_x(l) + 2\beta_x(l)\kappa(t, l) + (q_x^2(l) + \sigma_x^2(l))t \quad . \quad (3.5.10)$$

Rozwiązania dla momentów podukładów wykorzystamy do konstrukcji rozwiązania momentowego modelu hybrydowego.

Zakładamy, że pierwsze dwa momenty skalarne procesu stochastycznego $E[\mu_x(t)]$, $E[\mu_x^2(t)]$, będące rozwiązaniami skalnych momentowych hybrydowych równań różniczkowych, startujące w chwili t_0 ze stanu początkowego x_0 , są przełączane odpowiednio w chwilach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$. Przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ oraz zakładamy, że momentowy układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami.

Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli wartość pierwszego i drugiego momentu procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i , to znaczy $E[\mu_x(\tau_i, l_{i-1})]$ i $E[\mu_x^2(\tau_i, l_{i-1})]$, są równe odpowiednio wartości początkowej pierwszego i drugiego momentu procesu podukładu l_i w chwili τ_i , to znaczy

$$E[\mu_x(\tau_i, l_i)] = E[\mu_x(\tau_i, l_{i-1})], \quad E[\mu_x^2(\tau_i, l_i)] = E[\mu_x^2(\tau_i, l_{i-1})]. \quad (3.5.11)$$

Wówczas rozwiązania przybierają postać dla $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$\begin{aligned} E[\mu_x(t, l_k)] &= \\ &= E[\mu_x(\tau_k, l_{k-1})] \exp \quad \beta_x(l_k)(\kappa(t, l_k) - \kappa(\tau_k, l_k)) + \frac{1}{2}q_x^2(l_k)(t - \tau_k) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\mu_x^2(t, l_k)] &= \\ &= E[\mu_x^2(\tau_k, l_{k-1})] \exp \quad 2\beta_x(l_k)(\kappa(t, l_k) - \kappa(\tau_k, l_k)) + (q_x^2(l_k) + \sigma_x^2(l_k))(t - \tau_k) \quad . \end{aligned}$$

3.6. Uogólnione, hybrydowe modele Milevskiego–Promisłowa

3.6.1. Model ze skalarным, liniowym filtrem

Rodzina podukładów opisujących skalarne hybrydowe model Milevskiego–Promisłowa ze skalarным, liniowym filtrem wyraża się wzorem [37]

$$\mu_x(t, l) = \mu_{x0} \exp\{\alpha_x(l)t + q_x(l)y(t, l)\}, \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.6.1)$$

$$dy(t, l) = -\beta_x(l)y(t, l)dt + \gamma_x(t, l)dw(t), \quad (3.6.2)$$

gdzie $\alpha_x(l)$, $\beta_x(l)$, $q_x(l)$, μ_{x0} są stałymi parametrami, a $\gamma_x(t, l)$ – funkcjami czasu dla l -tego podukładu.

Stąd z formuły Itô wynika stochastyczne równanie różniczkowe

$$d \ln(\mu_x(t, l)) = [\alpha_x(l) - \beta_x(l)(\ln \mu_x(t, l) - \ln \mu_{x0}(l) - \alpha_x(l)t)]dt + \\ + q_x(l)\gamma_x(t, \sigma(t))dw(t). \quad (3.6.3)$$

Podobnie jak we wyprowadzeniu zamieszczonym w pracy [37] dla układów niehybrydowych, wprowadzając pewien nowy proces, zdefiniowany wzorem

$$K(t, \ln \mu_x(t, l)) = \frac{\ln(\mu_x(t, l))}{\gamma_x(t, l)} \quad (3.6.4)$$

i stosując formułę Itô, znajdujemy

$$dK(t, \ln \mu_x(t, l)) = \frac{\alpha_x(l) + \beta_x(l) \ln \mu_{x0}(l) + \alpha_x(l)\beta_x(l)t}{\gamma_x(t, l)} + \\ - K(t, \ln \mu_x(t, l)) \frac{\gamma'_x(t, \sigma(t))}{\gamma_x(t, l)} + \beta_x(l) dt + q_x(l)dw(t). \quad (3.6.5)$$

Jeśli założymy, że $\gamma_x(t, l) = \exp\{a_x(l)t\}$, wówczas równanie (3.6.5) redukuje się do postaci

$$dK(t, \ln \mu_x(t, l)) = -[a_x(l) + \beta_x(l)]K(t, \ln \mu_x(t, l))dt + \\ + [\alpha_x(l) + \beta_x(l) \ln \mu_{x0}(l) + \alpha_x(l)\beta_x(l)t]dt + q_x(l)dw(t). \quad (3.6.6)$$

Rozwiązanie równania (3.6.6) przyjmuje postać

$$K(t, \ln \mu_x(t, l)) = e^{-(a_x(l)+\beta_x(l))t} K(0, \ln \mu_{x0}(l)) + \\ + \int_0^t e^{-(a_x(l)+\beta_x(l))(t-s)} [\alpha_x(l) + \beta_x(l) \ln \mu_{x0}(l) + \beta_x(l)\alpha_x(l)s] e^{-a_x(l)s} ds + \\ + \int_0^t e^{-(a_x(l)+\beta_x(l)(t-s))} q_x(l)dw(s). \quad (3.6.7)$$

Rodzina momentów pierwszego i drugiego rzędu podukładów, opisujących uogólniony skalarny, hybrydowy model Milewskiego–Promisłowa ze skalarnym, liniowym filtrem, jest dla $l \in \mathbb{S}$ następująca

$$E[\mu_x(t, l)] = E[\mu_0]E[\exp\{\alpha_x(l)t + q_x(l)y(t, l)\}], \quad (3.6.8)$$

$$E[\mu_x^2(t, l)] = E[\mu_0^2]E[\exp\{2\alpha_x(l)t + 2q_x(l)y(t, l)\}]. \quad (3.6.9)$$

Korzystając z faktu, że $y(t)$ jest procesem gaussowskim, możemy zapisać zależności (3.6.8) oraz (3.6.9) w postaci

$$E[\mu_x(t, l)] = E[\mu_0] \exp\{\alpha_x(l)t + q_x(l)E[y(t, l)] + \frac{q_x^2(l)}{2}\text{var}[y(t)]\}, \quad (3.6.10)$$

$$E[\mu_x^2(t, l)] = E[\mu_0^2] \exp\{2\alpha_x(l)t + 2q_x(l)E[y(t, l)] + q_x^2(l)\text{var}[y(t)]\}. \quad (3.6.11)$$

Pierwsze dwa momenty procesu $y(t)$ spełniają następujące liniowe równania różniczkowe

$$\frac{dE[y(t, l)]}{dt} = -\beta_x(l)E[y(t, l)], \quad (3.6.12)$$

$$\frac{dE[y^2(t, l)]}{dt} = -2\beta_x(l)E[y^2(t, l)] + \gamma_x^2(t, l). \quad (3.6.13)$$

Jeśli ponownie założymy, że $\gamma_x(t, l) = \exp\{a_x(l)t\}$, wówczas (3.6.13) przyjmie postać

$$\frac{dE[y^2(t, l)]}{dt} = -2\beta_x(l)E[y^2(t, l)] + \exp\{2a_x(l)t\}. \quad (3.6.14)$$

Rozwiązania równań (3.6.12) i (3.6.14) są następujące

$$E[y(t, l)] = E[y(t_0, l)] \exp\{-\beta_x(l)(t - t_0)\}, \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.6.15)$$

$$\begin{aligned} E[y^2(t, l)] &= E[y^2(t_0, l)] \exp\{-2\beta_x(l)(t - t_0)\} + \\ &\quad - \frac{1}{2(a_x(l) + \beta_x(l))} \exp\{-2\beta_x(l)(t - t_0) + 2a_x(l)t_0\} + \\ &\quad + \frac{1}{2(a_x(l) + \beta_x(l))} \exp\{2a_x(l)t\}, \quad l \in \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Jeśli założymy, że $E[y(t_0, l)] = 0$, to także $E[y(t, l)] \equiv 0$ oraz $\text{var}[y(t, l)] = E[y^2(t, l)]$. Stąd wynika, że równości (3.6.10) oraz (3.6.11) przyjmą postać

$$E[\mu_x(t, l)] = E[\mu_0] \exp\{\alpha_x(l)t + \frac{q_x^2(l)}{2}E[y^2(t, l)]\}, \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.6.17)$$

$$E[\mu_x^2(t, l)] = E[\mu_0^2] \exp\{2\alpha_x(l)t + q_x^2(l)E[y^2(t, l)]\}, \quad l \in \mathbb{S}. \quad (3.6.18)$$

Otrzymane rozwiązania dla momentów podukładów wykorzystamy do konstrukcji rozwiązania momentowego modelu hybrydowego.

Zakładamy, że pierwsze dwa momenty skalarne procesu stochastycznego $E[\mu_x(t)]$, $E[\mu_x^2(t)]$, będące rozwiązaniami skalnych momentowych hybrydowych równań różniczkowych, startujące w chwili t_0 ze stanu początkowego x_0 są przełączane odpowiednio w chwilach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$. Przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ i zakładamy, że momentowy układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągiem.

Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli wartość pierwszego i drugiego momentu procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i , to znaczy $E[\mu_x(\tau_i, l_{i-1})]$ i $E[\mu_x^2(\tau_i, l_{i-1})]$, jest równa odpowiednio wartości początkowej pierwszego i drugiego momentu procesu podukładu l_i w chwili τ_i , czyli

$$E[\mu_x(\tau_i, l_i)] = E[\mu_x(\tau_i, l_{i-1})], \quad E[\mu_x^2(\tau_i, l_i)] = E[\mu_x^2(\tau_i, l_{i-1})]. \quad (3.6.19)$$

Wówczas rozwiązania mają postać dla $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, odpowiednio

$$\begin{aligned} E[\mu_x(t, l_k)] &= \\ &= E[\mu_x(\tau_k, l_{k-1})] \exp \left\{ \alpha_x(l_k)(t - \tau_k) + \frac{1}{2} q_x^2(l_k) E[y^2(t, l_k)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

$$\begin{aligned} E[\mu_x^2(t, l_k)] &= \\ &= E[\mu_x^2(\tau_k, l_{k-1})] \exp \left\{ 2\alpha_x(l_k)(t - \tau_k) + q_x^2(l_k) E[y^2(t, l_k)] \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} E[y^2(t, l_k)] &= E[y^2(\tau_k, l_{k-1})] \exp \{ -2\beta_x(l_k)(t - \tau_k) \} + \\ &- \frac{1}{2(a_x(l_k) + \beta_x(l_k))} \exp \{ -2\beta_x(l_k)(t - \tau_k) + 2a_x(l_k)\tau_k \} + \\ &+ \frac{1}{2(a_x(l_k) + \beta_x(l_k))} \exp \{ 2a_x(l_k)(t - \tau_k) \} \quad \text{dla } t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

3.6.2. Model z wektorowym, liniowym filtrem

Jeśli w uogólnionym modelu Milevskiego–Promisłowa zamienimy jednowymiarowe równanie filtru (3.6.2) wektorowym równaniem filtru, wówczas otrzymamy rozszerzony uogólniony model Milevskiego–Promisłowa w postaci

$$\mu_x(t, l) = \mu_{x0}(l) \exp \{ \alpha_x(l)t + \mathbf{q}_x^T(l) \mathbf{y}(t, l) \}, \quad (3.6.22)$$

$$d\mathbf{y}_x(t, l) = \mathbf{A}_x(l)\mathbf{y}(t, l)dt + \mathbf{G}_x(t, l)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.6.23)$$

gdzie:

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem filtru,

$\mathbf{A}_x(l)$ jest stałą macierzą, $n \times n$ wymiarową,

$\mathbf{q}_x(l) \in \mathbb{R}^n$ są stałymi wektorami,

$\mathbf{G}_x(t, l) = [G_{x1}, \dots, G_{xn}]^T$,

$G_{xi}(t, l)$ są deterministycznymi, nieliniowymi funkcjami czasu, opisującymi dynamikę filtru,

$\alpha_x(l)$, $\mu_{x0}(l)$, są pewnymi stałymi,

$w(t)$ jest skalarnym procesem Wienera.

Model (3.6.22)–(3.6.23) w postaci wektorowego, stochastycznego równania różniczkowego Itô wygląda następująco

$$\begin{aligned} dz_x(t, l) &= \\ &= [\alpha_x(l) + \sum_{i=1}^n q_{xi}(l)\mathbf{A}_x^i(l)\mathbf{y}(t, l)]dt + \sum_{i=1}^n q_{xi}(l)G_x^i(t, l)dw(t), \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

$$d\mathbf{y}(t, l) = \mathbf{A}_x(l)\mathbf{y}(t, l)dt + \mathbf{G}_x(t, l)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.6.25)$$

gdzie $z_x(t, l) = \ln \mu_x(t, l)$, $\mathbf{A}_x^i(l)$ jest i -tym wierszem macierzy $\mathbf{A}_x$, natomiast q_{xi}^i , $G_x^i(t, l)$ są i -tymi współrzędnymi wektorów odpowiednio $\mathbf{q}_x$ oraz $\mathbf{G}_x(t, l)$.

W celu znalezienia rozwiązania analitycznego równania (3.6.25) skorzystamy z zależności (2.2.8) w szczególnym przypadku dla $\mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$, $M = 1$ i jednowymiarowego szumu $w(t)$. Wówczas rozwiązanie przyjmie postać

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t, l) &= \\ &= \exp\{\mathbf{A}_x(l)(t - t_{0l})\}\mathbf{y}_{0l} + \int_{t_{0l}}^t \exp\{\mathbf{A}_x(l)(t - s)\}\mathbf{G}_x(s, l)dw(s). \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

Podstawiając (3.6.26) do równości (3.6.22), otrzymamy

$$\begin{aligned} \mu_x(t, l) &= \mu_{x0}(l) \exp \alpha_x(l)t + \mathbf{q}_x^T(l) \exp\{\mathbf{A}_x(l)(t - t_{0l})\}\mathbf{y}_{0l} + \\ &+ \int_{t_{0l}}^t \mathbf{q}_x^T(l) \exp\{\mathbf{A}_x(l)(t - s)\}\mathbf{G}_x(s, l)dw(s) \quad . \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

Otrzymane rozwiązania dla podukładów wykorzystamy do konstrukcji rozwiązania modelu hybrydowego.

Zakładamy, że skalarne procesy stochastyczne $\mu_x(t)$, będący rozwiązaniem skalarnego hybrydowego równania stochastycznego, startujący w momencie t_0 ze stanu x_0 , jest przełączany odpowiednio w chwilach $\tau_1, \dots, \tau_M$. Przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ i zakładamy, że układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami.

Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli wartość procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i jest równa wartości początkowej procesu podukładu l_i w chwili τ_i , czyli $\mu_x(\tau_i, l_i) = \mu_x(\tau_i, l_{i-1})$. Wówczas rozwiązanie ma postać dla $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \mu_x(t, l_k) = & \\ & = \mu_{\tau_k, l_{k-1}} \exp \left\{ \alpha_x(l_k)t + \mathbf{q}_x^T(l_k) \exp \{ \mathbf{A}_x(l_k)(t - \tau_k) \} \mathbf{y}_{\tau_k, l_{k-1}} + \right. \\ & + \int_{\tau_k}^t \mathbf{q}_x^T(l_k) \exp \{ \mathbf{A}_x(l_k)(t - s) \} \mathbf{G}_x(s, l_k) dw(s) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

Rodzina momentów pierwszego i drugiego stopnia podukładów, opisujących uogólniony, wektorowy, hybrydowy model Milevskiego–Promislowa, sprowadza się do wzorów

$$\begin{aligned} E[\mu_x(t, l)] = & \\ = E[\mu_{x_0}(l)] \exp \{ \alpha_x(l)t + \mathbf{q}_x^T(l) E[\mathbf{y}(t, l)] + \frac{1}{2} tr \{ \mathbf{Q}_x(l) cov[\mathbf{y}(t, l)] \} \}, \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

$$\begin{aligned} E[\mu_x^2(t, l)] = & \\ = E[\mu_{x_0}^2(l)] \exp \{ 2\alpha_x(l)t + 2\mathbf{q}_x^T(l) E[\mathbf{y}(t, l)] + tr \{ \mathbf{Q}_x(l) cov[\mathbf{y}(t, l)] \} \}. \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

gdzie:

$$\mathbf{Q}_x(l) = \mathbf{q}_x(l) \mathbf{q}_x^T(l),$$

$$cov[\mathbf{y}(t, l)] = E[\mathbf{y}(t, l) \mathbf{y}^T(t, l)] - E[\mathbf{y}(t, l)] E[\mathbf{y}^T(t, l)],$$

$$\frac{dE[\mathbf{y}_x(t, l)]}{dt} = \mathbf{A}_x(l) E[\mathbf{y}(t, l)], \quad l \in \mathbb{S}$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{dE[\mathbf{y}_x(t, l) \mathbf{y}_x^T(t, l)]}{dt} = & \mathbf{A}_x(l) E[\mathbf{y}_x(t, l) \mathbf{y}_x^T(t, l)] + \\ & + E[\mathbf{y}_x(t, l) \mathbf{y}_x^T(t, l)] \mathbf{A}_x^T(l) + \mathbf{G}_x(t, l) \mathbf{G}_x^T(t, l), \quad l \in \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (3.6.31)$$

Z równania (3.6.31) wynika, że $E[\mathbf{y}(t, l)] = \mathbf{0}$. Stąd z kolei wynika, że $\text{cov}[\mathbf{y}(t, l)] = E[\mathbf{y}(t, l)\mathbf{y}^T(t, l)]$ dla $l \in \mathbb{S}$ oraz zależności (3.6.29) i (3.6.30) przyjmą postać odpowiednio

$$\begin{aligned} E[\mu_x(t, l)] &= \\ &= E[\mu_{x0}(l)] \exp\{\alpha_x(l)t + \frac{1}{2}tr\{\mathbf{Q}_x(l)E[\mathbf{y}(t, l)\mathbf{y}^T(t, l)]\}\}, \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

$$\begin{aligned} E[\mu_x^2(t, l)] &= \\ &= E[\mu_{x0}^2(l)] \exp\{2\alpha_x(l)t + tr\{\mathbf{Q}_x(l)E[\mathbf{y}(t, l)\mathbf{y}^T(t, l)]\}\}. \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

Podobnie, jak w analizie poprzednich modeli, otrzymane rozwiązania dla momentów podukładów wykorzystamy do konstrukcji rozwiązania momentowego modelu hybrydowego.

Zakładamy, że pierwsze dwa momenty skalarne procesu stochastycznego $E[\mu_x(t)]$, $E[\mu_x^2(t)]$, będące rozwiązaniami skalnych momentowych hybrydowych równań różniczkowych, startujące w chwili t_0 ze stanu początkowego x_0 , są przełączane odpowiednio w chwilach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$. Przyjmujemy, że $\tau_0 = t_0$ i zakładamy, że momentowy układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasowych (τ_i, τ_{i+1}) , odpowiednio w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_i \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągami.

Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli wartość pierwszego i drugiego momentu procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i jest równa odpowiednio wartości początkowej pierwszego i drugiego momentu procesu podukładu l_i w chwili τ_i , czyli

$$E[\mu_x(\tau_i, l_i)] = E[\mu_x(\tau_i, l_{i-1})], \quad E[\mu_x^2(\tau_i, l_i)] = E[\mu_x^2(\tau_i, l_{i-1})]. \quad (3.6.34)$$

Wówczas rozwiązania dla $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ mają postać odpowiednio

$$\begin{aligned} E[\mu_x(t, l_k)] &= \\ &= E[\mu_x(\tau_k, l_{k-1})] \exp\{\alpha_x(l_k)t + \frac{1}{2}tr\{\mathbf{Q}_x(l_k)E[\mathbf{y}(t, l_k)\mathbf{y}^T(t, l_k)]\}\}, \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

$$\begin{aligned} E[\mu_x^2(t, l_k)] &= \\ &= E[\mu_x^2(\tau_k, l_{k-1})] \exp\{2\alpha_x(l_k)t + tr\{\mathbf{Q}_x(l_k)E[\mathbf{y}(t, l_k)\mathbf{y}^T(t, l_k)]\}\}, \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

gdzie macierz $\mathbf{\Gamma}_x(t, l_k) = E[\mathbf{y}(t, l_k)\mathbf{y}^T(t, l_k)]$ spełnia dla $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ równanie rekurencyjne

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_x(t, l_k)}{dt} = \mathbf{A}_x(l_k)\mathbf{\Gamma}_x(t, l_k) + \mathbf{\Gamma}_x(t, l_k)\mathbf{A}_x^T(l_k) + \mathbf{G}_x(t, l_k)\mathbf{G}_x^T(t, l_k), \quad (3.6.37)$$

$$\mathbf{\Gamma}_x(\tau_k, l_k) = \mathbf{\Gamma}_x(\tau_k, l_{k-1}).$$

Równanie (3.6.37) dla elementów macierzy

$$\Gamma_x(t, l_k) = [\Gamma_{x_{ij}}(t, l_k)] = E[y_i(t, l_k)y_j(t, l_k)]$$

ma dla $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ postać

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{x_{ij}}(t, l_k)}{dt} &= \sum_{q=1}^n [a_{iq}(t, l_k))\Gamma_{qj}(t, l_k) + a_{jq}(t, l_k)\Gamma_{qi}(t, l_k)] + \\ &+ G_{xi}(t, l_k)G_{xj}(t, l_k), \end{aligned} \quad (3.6.38)$$

$$\Gamma_{ij}(\tau_k, l_k) = \Gamma_{ij}(\tau_k, l_{k-1}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

W szczególnym przypadku, gdy $G_{xi}(t, l_k) = g_{xi}(l_k) \exp\{a_{xi}(l_k)t\}$, równanie (3.6.38) dla $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ jest postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{x_{ij}}(t, l_k)}{dt} &= \sum_{q=1}^n [a_{iq}(t, l_k))\Gamma_{qj}(t, l_k) + a_{jq}(t, l_k)\Gamma_{qi}(t, l_k)] + \\ &+ g_{xi}(t, l_k)g_{xj}(t, l_k) \exp\{(a_{xi}(l_k) + a_{xj}(l_k))t\}, \end{aligned} \quad (3.6.39)$$

$$\Gamma_{ij}(\tau_k, l_k) = \Gamma_{ij}(\tau_k, l_{k-1}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Przykład 3.1. Rozważmy model z dwuwymiarowym liniowym filtrem, opisany równaniami (3.6.22) oraz (3.6.23), gdzie macierze $\mathbf{A}(l)$ oraz wektory $\mathbf{G}_x(l)$, $\mathbf{q}_x(l)$ i $\mathbf{c}(l)$, $l = 1, 2$ mają postać

$$\mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1) & 2h(1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{x1}e^{a_{x1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_x(1) = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.40)$$

$$\mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(2) & 2h(2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_x(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{x2}e^{a_{x2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_x(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (3.6.41)$$

gdzie $\mu_{x0}(l)$, $\alpha_x(l)$, $\omega_0(l)$, $h(l)$, $g_{x0}(l)$, $a_{xi}(l)$, $l = 1, 2$, $i = 1, 2$ są stałymi parametrami.

Dwa modele podukładów są opisane następującymi równościami

$$\mu_x(t, 1) = \mu_{x0}(1) \exp\{\alpha_x(1)t + q_1 y_1(t, 1)\}, \quad (3.6.42)$$

$$d\mathbf{y}(t, 1) = \mathbf{A}_x(1)\mathbf{y}(t, 1)dt + \mathbf{G}_x(t, 1)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.6.43)$$

$$\mu_x(t, 2) = \mu_{x0}(2) \exp\{\alpha_x(2)t + q_2 y_2(t, 2)\}, \quad (3.6.44)$$

$$d\mathbf{y}(t, 2) = \mathbf{A}_x(2)\mathbf{y}(t, 2)dt + \mathbf{G}_x(t, 2)dw(t), \quad l \in \mathbb{S}. \quad (3.6.45)$$

Jeśli założymy, że jako pierwszy działał układ dla $l = 1$, przy warunkach początkowych dla $t_0 = 0$

$$\mathbf{y}(0, 1) = [y_1(0, 1), y_2(0, 1)]^T = [y_{10}, y_{20}]^T \quad \text{oraz} \quad \mu_{x0}(1) = \mu_0$$

oraz chwila przełączenia układu dla $l = 1$ na układ dla $l = 2$ następuje dla $t = \tau_1$, wówczas rozwiązania równań stochastycznych (3.6.43) i (3.6.45) są następujące

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t, 1) = & \exp\{\mathbf{A}(1)(t - 0)\}\mathbf{y}(0, 1) + \\ & + \int_0^t \exp\{\mathbf{A}(1)(t - s)\}\mathbf{G}_x(s, 1)dw(s), \quad \text{dla } t \in [0, \tau_1], \end{aligned} \quad (3.6.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t, 2) = & \exp\{\mathbf{A}(2)(t - \tau_1)\}\mathbf{y}(\tau_1, 1) + \\ & + \int_{\tau_1}^t \exp\{\mathbf{A}(2)(t - s)\}\mathbf{G}_x(s, 2)dw(s), \quad \text{dla } t \geq \tau_1. \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

Rodzina momentów pierwszego i drugiego stopnia podukładów opisujących uogólniony, wektorowy, hybrydowy model Milewskiego–Promisłowa ma postać

$$\begin{aligned} E[\mu_x(t, 1)] = & \\ E[\mu_{x0}(1)] \exp\{\alpha_x(1)t + \mathbf{q}_x^T(1)E[\mathbf{y}(t, 1)] + \frac{1}{2}tr\{\mathbf{Q}_x(1)\text{cov}[\mathbf{y}(t, 1)]\}\}, & \\ E[\mu_x(t, 2)] = & \\ E[\mu_{x0}(2)] \exp\{\alpha_x(2)t + \mathbf{q}_x^T(2)E[\mathbf{y}(t, 2)] + \frac{1}{2}tr\{\mathbf{Q}_x(2)\text{cov}[\mathbf{y}(t, 2)]\}\}, & \end{aligned} \quad (3.6.48)$$

$$\begin{aligned} E[\mu_x^2(t, 1)] = & \\ E[\mu_{x0}^2(1)] \exp\{2\alpha_x(1)t + 2\mathbf{q}_x^T(1)E[\mathbf{y}(t, 1)] + tr\{\mathbf{Q}_x(1)\text{cov}[\mathbf{y}(t, 1)]\}\}, & \\ E[\mu_x^2(t, 2)] = & \\ E[\mu_{x0}^2(2)] \exp\{2\alpha_x(2)t + 2\mathbf{q}_x^T(2)E[\mathbf{y}(t, 2)] + tr\{\mathbf{Q}_x(2)\text{cov}[\mathbf{y}(t, 2)]\}\}, & \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{Q}_x(1) = \begin{bmatrix} q_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_x(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6.49)$$

Momenty procesów $\mathbf{y}_x(t, l)$, $l = 1, 2$ spełniają równania

$$\frac{dE[\mathbf{y}_x(t, l)]}{dt} = \mathbf{A}_x(l)E[\mathbf{y}(t, l)], \quad l = 1, 2, \quad (3.6.50)$$

$$\frac{dE[\mathbf{y}_x(t, l)\mathbf{y}_x^T(t, l)]}{dt} = \mathbf{A}_x(l)E[\mathbf{y}_x(t, l)\mathbf{y}_x^T(t, l)] + \quad (3.6.51)$$

$$+ E[\mathbf{y}_x(t, l)\mathbf{y}_x^T(t, l)]\mathbf{A}_x^T(l) + \mathbf{G}_x(t, l)\mathbf{G}_x^T(t, l).$$

Z równania (3.6.50) wynika, że $E[\mathbf{y}_x(t, l)] = \mathbf{0}$. Stąd z kolei wynika, że

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{y}_x(t, l)] &= E[\mathbf{y}_x(t, l)\mathbf{y}_x^T(t, l)] = \\ &= \begin{bmatrix} E[y_{x_1}(t, l)^2] & E[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(t, l)] \\ E[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(t, l)] & E[y_{x_2}(t, l)^2] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6.52)$$

Równanie (3.6.51) dla współrzędnych przyjmie postać dla $l = 1, 2$

$$\frac{dE[y_{x_1}^2(t, l)]}{dt} = 2E[y_{x_1}(t, l)y_2(t, l)], \quad E[y_{x_1}^2(0, l)] = \Gamma_{11_0},$$

$$\frac{dE[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(t, l)]}{dt} = E[y_{x_2}^2(t, l)] - \omega_0(l)E[y_{x_1}^2(t, l)] + 2h(l)E[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(t, l)],$$

$$E[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(0, l)] = \Gamma_{12_0},$$

$$\frac{dE[y_{x_2}^2(t, l)]}{dt} = -2\omega_0(l)E[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(t, l)] + 4h(l)E[y_{x_2}^2(t, l)] + g_{xl}^2 e^{2a_{xl}t},$$

$$E[y_2^2(0, l)] = \Gamma_{22_0},$$

przy dodatnich warunkach początkowych $\Gamma_{11_0}, \Gamma_{12_0}, \Gamma_{22_0} > 0$, takich że

$$\Gamma_{11_0}\Gamma_{22_0} - \Gamma_{12_0}^2 > 0.$$

Z równości (3.6.49) i (3.6.52) wynika, że zależności (3.6.48) sprowadzą się do następujących formuł

$$\begin{aligned}
 E[\mu_x(t, 1)] &= E[\mu_{x0}(1)] \exp\{\alpha_x(1)t + \frac{1}{2}q_1^2 E[y_{x_1}^2(t, 1)]\}, \\
 E[\mu_x(t, 2)] &= E[\mu_{x0}(2)] \exp\{\alpha_x(2)t + \frac{1}{2}q_2^2 E[y_{x_2}^2(t, 1)]\}, \\
 E[\mu_x^2(t, 1)] &= E[\mu_{x0}^2(1)] \exp\{2\alpha_x(1)t + q_1^2 E[y_{x_1}^2(t, 1)]\}, \\
 E[\mu_x^2(t, 2)] &= E[\mu_{x0}^2(2)] \exp\{2\alpha_x(2)t + q_2^2 E[y_{x_2}^2(t, 2)]\}.
 \end{aligned} \tag{3.6.53}$$

W przypadku, gdy wystąpi jedno przełączenie w chwili $t = \tau_1$ ze stanu $l = 1$ do stanu $l = 2$, wówczas momenty w uogólnionym, wektorowym, hybrydowym modelu Milevskiego–Promisłowa, opisanym równaniami (3.6.22), (3.6.23), będą wyrażały się wzorami

$$\begin{aligned}
 E[\mu_x(t, 1)] &= E[\mu_{x0}(1)] \exp\{\alpha_x(1)t + \frac{1}{2}q_1^2 E[y_{x_1}^2(t, 1)]\}, \quad 0 \leq t \leq \tau_1, \\
 E[\mu_x(t, 2)] &= E[\mu_x(\tau_1, 1)] \exp\{\alpha_x(2)(t - \tau_1) + \frac{1}{2}q_2^2 E[y_{x_2}^2(t, 1)]\}, \quad t \geq \tau_1, \\
 E[\mu_x^2(t, 1)] &= E[\mu_{x0}^2(1)] \exp\{2\alpha_x(1)t + q_1^2 E[y_{x_1}^2(t, 1)]\}, \quad 0 \leq t \leq \tau_1, \\
 E[\mu_x^2(t, 2)] &= E[\mu_x^2(\tau_1, 1)] \exp\{2\alpha_x(2)(t - \tau_1) + q_2^2 E[y_{x_2}^2(t, 2)]\}, \quad t \geq \tau_1, \\
 \frac{dE[y_{x_1}^2(t, 1)]}{dt} &= 2E[y_{x_1}(t, 1)y_2(t, 1)], \quad E[y_{x_1}^2(0, 1)] = \Gamma_{110}, \\
 \frac{dE[y_{x_1}(t, 1)y_{x_2}(t, 1)]}{dt} &= E[y_{x_2}^2(t, 1)] - \omega_0(1)E[y_{x_1}^2(t, 1)] + 2h(1)E[y_{x_1}(t, 1)y_2(t, 1)], \\
 E[y_{x_1}(t, 1)y_{x_2}(0, 1)] &= \Gamma_{120}, \\
 \frac{dE[y_{x_2}^2(t, 1)]}{dt} &= -2\omega_0(1)E[y_{x_1}(t, 1)y_{x_2}(t, 1)] + 4h(1)E[y_{x_2}^2(t, 1)] + g_{x_1}^2 e^{2a_{x_1}t},
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[y_{x_2}^2(0, 1)] = \Gamma_{220}, \quad l = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq \tau_1,$$

$$\frac{d\mathbb{E}[y_{x_1}^2(t, 2)]}{dt} = 2\mathbb{E}[y_{x_1}(t, 1)y_{x_2}(t, 1)], \quad \mathbb{E}[y_{x_1}^2(\tau_1, 2)] = \mathbb{E}[y_{x_1}^2(\tau, 1)],$$

$$\frac{d\mathbb{E}[y_{x_1}(t, 2)y_{x_2}(t, 2)]}{dt} = \mathbb{E}[y_{x_2}^2(t, 1)] - \omega_0(2)\mathbb{E}[y_{x_1}^2(t, 1)] + 2h(2)\mathbb{E}[y_{x_1}(t, l)y_{x_2}(t, 1)],$$

$$\mathbb{E}[y_{x_1}(\tau, 2)y_{x_2}(\tau, 2)] = \mathbb{E}[y_{x_1}(\tau, 1)y_{x_2}(\tau_1, 1)],$$

$$\frac{d\mathbb{E}[y_{x_2}^2(t, 2)]}{dt} = -2\omega_0(2)\mathbb{E}[y_{x_1}(t, 2)y_{x_2}(t, 2)] + 4h(2)\mathbb{E}[y_{x_2}^2(t, 2)] + g_{x_1}^2 e^{2a_{x_2}(t-\tau_1)},$$

$$\mathbb{E}[y_{x_2}^2(\tau_1, 2)] = \mathbb{E}[y_{x_2}^2(\tau_1, 1)], \quad l = 1, 2, \quad t \geq \tau_1.$$

3.6.3. Model z liniowymi, skalarnymi filtrami

Rozważmy następujący szczególny przypadek modelu (3.6.22)–(3.6.23)

$$\mu_x(t, l) = \mu_{x0}(l) \exp\{\alpha_x(l)t + q_{x_1}(l)y_1(t, l) + q_{x_2}(l)y_2(t, l)\}, \quad (3.6.54)$$

$$dy_1(t, l) = -\beta_{x_1}(l)y_1(t, l)dt + \gamma_{x_1}(l)dw(t), \quad (3.6.55)$$

$$dy_2(t, l) = -\beta_{x_2}(l)y_2(t, l)dt + \gamma_{x_2}(l)dw(t), \quad (3.6.56)$$

gdzie $\alpha_x(l), \beta_{x_1}(l), \beta_{x_2}(l), q_{x_1}(l), q_{x_2}(l), \mu_{x0}(l), \gamma_{x_1}(l), \gamma_{x_2}(l)$ są stałymi parametrami, $l \in \mathbb{S}$.

Logarytmując obustronnie równość (3.6.54) i korzystając z formuły Itô, otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} d \ln \mu_x(t, l) = & [\alpha_x(l) - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)y_1(t, l) - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)y_2(t, l)]dt + \\ & + (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))dw(t). \end{aligned} \quad (3.6.57)$$

Wprowadzając nowy wektor stanu

$$\mathbf{z}_x(t, l) = [z_{x_1}(t, l), z_{x_2}(t, l), z_{x_3}(t, l)]^T = [\ln \mu_x(t, l), y_1(t, l), y_2(t, l)]^T,$$

równania (3.6.54) oraz (3.6.55), (3.6.56), możemy zapisać wektorowo

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{z}_x(t, l) = & \left(\begin{bmatrix} 0 & -\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l) & -\beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l) \\ 0 & -\beta_{x_1}(l) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{x_2}(l) \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} \alpha_x(l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) dt + \\
 & + \begin{bmatrix} \gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l) \\ \gamma_{x_1}(l) \\ \gamma_{x_2}(l) \end{bmatrix} dw(t).
 \end{aligned} \tag{3.6.58}$$

Równanie obserwacji ma postać

$$v(t, l) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}_x(t, l), \quad \mathbf{c}^T = [1, 0, 0]^T. \tag{3.6.59}$$

Nieznane parametry modelu to $\ln \mu_0(l)$, $\alpha_x(l)$, $\beta_{x_1}(l)$, $\beta_{x_2}(l)$, $q_{x_1}(l)$, $q_{x_2}(l)$, $\gamma_{x_1}(l)$, $\gamma_{x_2}(l)$. W uproszczonej wersji można założyć $q_{x_1}(l) = q_{x_2}(l) = 1$. Równania momentów modelu są następujące

$$\frac{dE[z_{x_1}(t, l)]}{dt} = \alpha_x(l) - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)] - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_3}(t, l)], \tag{3.6.60}$$

$$\frac{dE[z_{x_2}(t, l)]}{dt} = -\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)], \tag{3.6.61}$$

$$\frac{dE[z_{x_3}(t, l)]}{dt} = -\beta_{x_2}(l)E[z_{x_3}(t, l)], \tag{3.6.62}$$

$$\frac{dE[z_{x_2}^2(t, l)]}{dt} = -2\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2(t, l)] + \gamma_{x_1}^2(l), \tag{3.6.63}$$

$$\frac{dE[z_{x_3}^2(t, l)]}{dt} = -2\beta_{x_2}(l)E[z_{x_3}^2(t, l)] + \gamma_{x_2}^2(l), \tag{3.6.64}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dE[z_{x_1}^2(t, l)]}{dt} = & 2\alpha_x(l)E[z_{x_1}(t, l)] - 2\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_2}(t, l)] + \\
 & - 2\beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))^2,
 \end{aligned} \tag{3.6.65}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[z_{x_1}(t, l)z_{x_2}(t, l)]}{dt} &= \alpha_x(l)E[z_{x_2}(t, l)] - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2(t, l)] + \\
&- \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] - \beta_{x_1}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_2}(t, l)] + \\
&+ (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))\gamma_{x_1}(l),
\end{aligned} \tag{3.6.66}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[z_{x_1}(t, l)z_{x_3}(t, l)]}{dt} &= \alpha_x(l)E[z_{x_3}(t, l)] - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \\
&- \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_2}^2(t, l)] - \beta_{x_2}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \\
&+ (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))\gamma_{x_2}(l),
\end{aligned} \tag{3.6.67}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)]}{dt} &= -\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \\
&- \beta_{x_2}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \gamma_{x_1}(l)\gamma_{x_2}(l).
\end{aligned} \tag{3.6.68}$$

Z równań (3.6.61) oraz (3.6.62) wynika, że można przyjąć

$$E[z_{x_2}(t, l)] = E[z_{x_3}(t, l)] = 0.$$

3.6.4. Model z niezależnymi, liniowymi, skalarnymi filtrami

Rozważmy następujący szczególny przypadek modelu (3.6.22)–(3.6.23)

$$\mu_x(t, l) = \mu_{x0}(l) \exp\{\alpha_x(l)t + q_{x_1}(l)y_1(t, l) + q_{x_2}(l)y_2(t, l)\}, \tag{3.6.69}$$

$$dy_1(t, l) = -\beta_{x_1}(l)y_1(t, l)dt + \gamma_{x_1}(l)dw_1(t), \tag{3.6.70}$$

$$dy_2(t, l) = -\beta_{x_2}(l)y_2(t, l)dt + \gamma_{x_2}(l)dw_2(t), \tag{3.6.71}$$

gdzie $\alpha_x(l)$, $\beta_{x_1}(l)$, $\beta_{x_2}(l)$, $q_{x_1}(l)$, $q_{x_2}(l)$, $\mu_{x0}(l)$, $\gamma_{x_1}(l)$, $\gamma_{x_2}(l)$ są stałymi parametrami, $l \in \mathbb{S}$.

Logarytmując obustronnie równość (3.6.54) i korzystając z formuły Itô, otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} d \ln \mu_x(t) = & [\alpha_x(l) - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)y_1(t) - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)y_2(t)]dt + \\ & + (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))dw(t). \end{aligned} \quad (3.6.72)$$

Wprowadzając nowy wektor stanu

$$\mathbf{z}_x(t, l) = [z_{x_1}(t, l), z_{x_2}(t, l), z_{x_3}(t, l)]^T = [\ln \mu_x(t, l), y_1(t, l), y_2(t, l)]^T,$$

równania (3.6.72) oraz (3.6.70), (3.6.71) możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{aligned} d\mathbf{z}_x(t) = & \left(\begin{bmatrix} 0 & -\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l) & -\beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l) \\ 0 & -\beta_{x_1}(l) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{x_2}(l) \end{bmatrix} \mathbf{z}_x(t, l) + \begin{bmatrix} \alpha_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) dt + \\ & + \begin{bmatrix} \gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) \\ \gamma_{x_1}(l) \\ 0 \end{bmatrix} dw_1(t) + \begin{bmatrix} \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l) \\ 0 \\ \gamma_{x_2}(l) \end{bmatrix} dw_2(t), \end{aligned} \quad (3.6.73)$$

Równanie obserwacji ma postać

$$v(t, l) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}_x(t, l), \quad \mathbf{c}^T = [1, 0, 0]^T. \quad (3.6.74)$$

Nieznanymi parametrami w liniowym modelu są $\ln \mu_0(l)$, $\alpha_x(l)$, $\beta_{x_1}(l)$, $\beta_{x_2}(l)$, $q_{x_1}(l)$, $q_{x_2}(l)$, $\gamma_{x_1}(l)$, $\gamma_{x_2}(l)$. W uproszczonej wersji można dodatkowo założyć $q_{x_1}(l) = q_{x_2}(l) = 1$.

Równania momentów modelu wyrażają się wzorami

$$\frac{dE[z_{x_1}(t, l)]}{dt} = \alpha_x(l) - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)] - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_3}(t, l)], \quad (3.6.75)$$

$$\frac{dE[z_{x_2}(t, l)]}{dt} = -\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)], \quad (3.6.76)$$

$$\frac{dE[z_{x_3}(t, l)]}{dt} = -\beta_{x_2}(l)E[z_{x_3}(t, l)], \quad (3.6.77)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[z_{x_1}^2(t, l)]}{dt} &= 2\alpha_x(l)E[z_{x_1}(t, l)] - 2\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_2}(t, l)] + \\
&- 2\beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \gamma_{x_1}^2(l)q_{x_1}^2(l) + \\
&+ \gamma_{x_2}^2(l)q_{x_2}^2(l),
\end{aligned} \tag{3.6.78}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[z_{x_1}(t, l)z_{x_2}(t, l)]}{dt} &= \alpha_x(l)E[z_{x_2}(t, l)] - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2(t, l)] + \\
&- \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] - \beta_{x_1}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_2}(t, l)] + \\
&+ \gamma_{x_1}^2(l)q_{x_1}(l),
\end{aligned} \tag{3.6.79}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE[z_{x_1}(t, l)z_{x_3}(t, l)]}{dt} &= \alpha_x(l)E[z_{x_3}(t, l)] - \beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \\
&- \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_2}^2(t, l)] - \beta_{x_2}(l)E[z_{x_1}(t, l)z_{x_3}(t, l)] + \\
&+ \gamma_{x_2}^2(l)q_{x_2}(l),
\end{aligned} \tag{3.6.80}$$

$$\frac{dE[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)]}{dt} = -\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)] - \beta_{x_2}(l)E[z_{x_2}(t, l)z_{x_3}(t, l)], \tag{3.6.81}$$

$$\frac{dE[z_{x_2}^2(t, l)]}{dt} = -2\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2(t, l)] + \gamma_{x_1}^2(l), \tag{3.6.82}$$

$$\frac{dE[z_{x_3}^2(t, l)]}{dt} = -2\beta_{x_2}(l)E[z_{x_3}^2(t, l)] + \gamma_{x_2}^2(l). \tag{3.6.83}$$

Z równań (3.6.76) oraz (3.6.77) wynika, że można przyjąć

$$E[z_{x_2}(t, l)] = E[z_{x_3}(t, l)] = 0.$$

3.7. Dyskretno-czasowe reprezentacje modeli hybrydowych

3.7.1. Uogólniony, skalarny, hybrydowy model Lee–Cartera

Dyskretno-czasowa reprezentacja równania (3.5.1) ma postać

$$\ln m_{x,t} = \ln m_{x,t-1} + b_x[k(t) - k(t-1)] + \frac{1}{2} (q_x^2 - \sigma_x^2) + \sigma_x \varepsilon_{x,t}, \quad (3.7.1)$$

gdzie $m_{x,t}$ jest cząstkowym współczynnikiem zgonów, $\varepsilon_{x,t} = w(t) - w(t-1)$.

Z własności standardowego procesu Wienera wynika, że wartość oczekiwana dla $\varepsilon_{x,t}$ jest równa zero, a wariancja $\varepsilon_{x,t}$ równa jest 1.

Będziemy dalej zakładać, że $k(t)$ jest przedziałami liniową funkcją

$$k(t) = \begin{cases} c_1 + \delta_1 t & \text{dla } l = l_1, \quad t = 1, 2, \dots, \tau_1, \\ c_2 + \delta_2 t & \text{dla } l = l_2, \quad t = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2, \dots, \tau_2, \\ \dots & \dots \\ c_M + \delta_M t & \text{dla } l = l_M, \quad t = \tau_{M-1} + 1, \tau_{M-1} + 2, \dots, T, \end{cases} \quad (3.7.2)$$

gdzie τ_i są punktami przełączeń określonymi przez różne ograniczenia umieralności I_i oraz $b_x, \sigma_x^2, q_x^2, \delta_i, c_i, x = 0, 1, \dots, X, i = 1, 2, \dots, M$, jest zbiorem parametrów modelu.

Model zdefiniowany przez równania (3.7.1)–(3.7.2) będzie nazywany rozszerzonym, hybrydowym modelem Lee–Cartera EHLIC (*Extended Hybrid Lee–Carter Model*).

3.7.2. Uogólnione, hybrydowe modele Milevskiego–Promisłowa

Model ze skalarnym, liniowym filtrem

Dyskretno-czasowa reprezentacja równania (3.6.5) ma postać

$$\begin{aligned} K(t, \ln \mu_x(t, l)) = \\ = K(t-1, \ln \mu_x(t-1, l)) + \frac{\alpha_x(l) + \beta_x(l) \ln \mu_0 + \alpha_x \beta_x (t-1)}{\gamma_x(t-1)} + \\ - K(t-1, \ln \mu) \frac{\gamma_x(t, l) - \gamma_x(t-1, l)}{\gamma_x(t-1, l)} + \beta_x(l) + q_x \varepsilon_{x,t,l}, \quad l \in \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

W przypadku, gdy funkcje $\gamma_x(t, l)$ mają postać $\gamma_x(t, l) = \exp\{\alpha_x(l)t\}$, odpowiednią dyskretno-czasową reprezentację równania (3.6.6) otrzymamy z równości (3.6.7) przez odjęcie od $K(t, \ln \mu(t, l))$ iloczynu

$$\begin{aligned} & e^{-(\alpha_x(l) + \beta_x(l))} K(t-1, \ln \mu(t-1, l)). \\ & K(t, \ln \mu(t, l)) - \exp\{-(\alpha_x(l) + \beta_x(l))\} K(t-1, \ln \mu(t-1, l)) = \\ & = \psi_x(t, l) + q_x(l) \quad {}_{x,t}(l), \quad l \in \mathbb{S}, \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi(t, l) = & \int_0^1 e^{-(\alpha_x(l) + \beta_x(l))u} [\alpha_x(l) + \beta_x(l) \ln \mu_0 + \\ & + \beta_x(l) \alpha_x(l)(t-u)] e^{-\alpha_x(l)(t-u)} du, \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

$${}_{x,t}(l) = - \int_0^1 e^{-(\alpha_x(l) + \beta_x(l))u} dw(t-u). \quad (3.7.6)$$

Po scałkowaniu (3.7.5) przyjmie postać

$$\psi(t, l) = (1 - e^{-\beta_x(l)}) \ln \mu_0 + \alpha_x(l) e^{-\beta_x(l)} + \alpha_x(l) t (1 - e^{-\beta_x(l)}) e^{-\alpha_x(l)t}. \quad (3.7.7)$$

Zauważmy, że ${}_{x,t}$ jest gaussowską zmienną losową o zerowej wartości średniej $E[{}_{x,t}(l)] = 0$ i wariancji

$$\text{var}[{}_{x,t}(l)] = E[{}_{x,t}^2(l)] = \frac{q_x(l)^2}{2(\alpha_x(l) + \beta_x(l))} \frac{1 - e^{-2(\alpha_x(l) + \beta_x(l))}}{1}. \quad (3.7.8)$$

Zależność (3.7.4) można zapisać jako równanie różnicowe

$$K_t(l) = b_0(t, l) + b_1(l) K_{t-1}(l) + {}_{(t,l)}, \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.7.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_t(l) &= K(t, \ln \mu(t, l)), \quad b_1 = \exp\{-(\alpha_x(l) + \beta_x(l))\}, \\ b_0(t, l) &= \psi_x(t, l) = (1 - e^{-\beta_x(l)}) \ln \mu_0 + \alpha_x(l) e^{-\beta_x(l)} + \\ &+ \alpha_x(l) t (1 - e^{-\beta_x(l)}) e^{-\alpha_x(l)t}, \quad l \in \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych, (3.7.9) można przekształcić do postaci

$$z_t(l) = a_0(l) + a_1(l)t + a_2(l)z_{t-1}(l) + \xi_t(l), \quad l \in \mathbb{S}, \quad (3.7.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} z_t(l) &= \ln \mu_x(t, l), \quad a_0(l) = (1 - e^{-\beta_x(l)}) \ln \mu_0 + \alpha_x(l) e^{-\beta_x(l)}, \\ a_1(l) &= \alpha_x(l) (1 - e^{-\beta_x(l)}), \quad a_2(l) = e^{-\beta_x(l)}, \quad \xi_t(l) = e^{\alpha_x(l)t} {}_t(l). \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Model z wektorowym, liniowym filtrem

Dyskretno-czasowa reprezentacja równania (3.6.24) ma postać

$$\begin{aligned} z_x(t, l) &= \alpha_{x0}(\sigma(t)) + \alpha_{x1}(\sigma(t))t + \mathbf{q}_x^T(\sigma(t))\mathbf{y}_x(t), \\ \mathbf{y}_x(t) &= \mathbf{A}(\sigma(t))\mathbf{y}_x(t-1)\Delta t + \mathbf{G}(\sigma(t))\Delta w_t, \quad l \in \mathbb{S}, \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

gdzie $z_x(t) = \ln \mu_x(t)$, a zmienna czasu t przyjmuje wartości dyskretne.

Otrzymane rekurencyjne zależności (3.7.13) rozwiązania dla podukładów wykorzystamy do konstrukcji dyskretnego rozwiązania modelu hybrydowego.

Zakładamy, że skalarne procesy stochastyczne $z_x(t)$, będący rozwiązaniem skalarnego hybrydowego równania stochastycznego, startujący w momencie t_0 ze stanu początkowego x_0 , jest przełączany w chwilach $\tau_1, \dots, \tau_M$. Przyjmujemy, że $\tau_0 = 0$ i zakładamy, że układ hybrydowy będzie pozostawał w przedziałach czasu (τ_i, τ_{i+1}) w stanach l_i , $i = 0, \dots, M$, gdzie $l_0, \dots, l_M \in \mathbb{S}$ jest pewnym podciągiem.

Ponadto zakładamy ciągłość rozwiązań, czyli wartość procesu podukładu l_{i-1} w chwili τ_i jest równa wartości początkowej procesu podukładu l_i w chwili τ_i , to znaczy $z_x(\tau_i, l_i) = z_x(\tau_i, l_{i-1})$. Wówczas dyskretne równania dla układu hybrydowego przyjmą postać dla $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$

$$\begin{aligned} z_x(t, l_k) &= \alpha_{x0}(l_k) + \alpha_{x1}(l_k)(t - \tau_i) + \mathbf{q}_x^T(l_k)\mathbf{y}_x(t), \\ \mathbf{y}_x(t, l_k) &= (\mathbf{A}(l_k) + \mathbf{I})\mathbf{y}_x(t-1) + \mathbf{G}(l_k)\Delta w_t, \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

$$y_x(\tau_i, l_k) = y_x(\tau_i, l_{k-1}), \quad z_x(\tau_i, l_k) = z_x(\tau_i, l_{k-1}).$$

3.7.3. Dyskretno-czasowa reprezentacja układu równań momentów dla uogólnionych, hybrydowych modeli Milewskiego–Promisłowa

Model z liniowymi, skalarnymi filtrami

$$E[z_{x_1}]_{i+1}(l) = E[z_{x_1}]_i(l) + \alpha_x(l)\delta, \quad (3.7.15)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}^2]_{i+1}(l) = & E[z_{x_1}^2]_i(l) + (2\alpha_x(l)E[z_{x_1}]_i(l) + \\ & - 2\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) - 2\beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) + \\ & + (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))^2)\delta, \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

$$E[z_{x_2}^2]_{i+1}(l) = E[z_{x_2}^2]_i(l) + (-2\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2]_i(l) + \gamma_{x_1}^2(l))\delta, \quad (3.7.17)$$

$$E[z_{x_3}^2]_{i+1}(l) = E[z_{x_3}^2]_i(l) + (-2\beta_{x_2}(l)E[z_{x_3}^2]_i(l) + \gamma_{x_2}^2(l))\delta, \quad (3.7.18)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}z_{x_2}]_{i+1}(l) = & E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) + (-\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2]_i(l) + \\ & - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) - \beta_{x_1}(l)E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) + \\ & + (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))\gamma_{x_1}(l))\delta, \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}z_{x_3}]_{i+1}(l) = & E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) + (-\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) + \\ & - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_3}^2]_i(l) - \beta_{x_2}(l)E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) + \\ & + (\gamma_{x_1}(l)q_{x_1}(l) + \gamma_{x_2}(l)q_{x_2}(l))\gamma_{x_2}(l))\delta, \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_2}z_{x_3}]_{i+1}(l) = & E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) + (-\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) + \\ & - \beta_{x_2}(l)E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) + \gamma_{x_1}(l)\gamma_{x_2}(l))\delta, \end{aligned} \quad (3.7.21)$$

gdzie

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}]_i(l) &= E[z_{x_1}](t_i, l), \quad E[z_{x_j}^2]_i(l) = E[z_{x_j}^2](t_i, l), \quad j = 1, 2, 3, \\ E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) &= E[z_{x_1}z_{x_2}](t_i, l), \quad E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) = E[z_{x_1}z_{x_3}](t_i, l), \\ E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) &= E[z_{x_2}z_{x_3}](t_i, l), \quad \delta = t_{i+1} - t_i = \text{const.} \end{aligned}$$

Model z niezależnymi, liniowymi, skalarnymi filtrami

$$E[z_{x_1}]_{i+1}(l) = E[z_{x_1}]_i(l) + \alpha_x(l)\delta, \quad (3.7.22)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}^2]_{i+1}(l) &= E[z_{x_1}^2]_i(l) + (2\alpha_x(l)E[z_{x_1}]_i(l) + \\ &\quad - 2\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) - 2\beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) + \\ &\quad + (\gamma_{x_1}^2(l)q_{x_1}^2(l) + \gamma_{x_2}^2(l)q_{x_2}^2(l)))\delta, \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

$$E[z_{x_2}^2]_{i+1}(l) = E[z_{x_2}^2]_i(l) + (-2\beta_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2]_i(l) + \gamma_{x_1}^2(l))\delta, \quad (3.7.24)$$

$$E[z_{x_3}^2]_{i+1}(l) = E[z_{x_3}^2]_i(l) + (-2\beta_{x_2}(l)E[z_{x_3}^2]_i(l) + \gamma_{x_2}^2(l))\delta, \quad (3.7.25)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}z_{x_2}]_{i+1}(l) &= E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) + (-\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}^2]_i(l) + \\ &\quad - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) - \beta_{x_1}(l)E[z_{x_1}z_{x_2}]_i(l) + \\ &\quad + \gamma_{x_1}^2(l)q_{x_1}(l))\delta, \end{aligned} \quad (3.7.26)$$

$$\begin{aligned} E[z_{x_1}z_{x_3}]_{i+1}(l) &= E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) + (-\beta_{x_1}(l)q_{x_1}(l)E[z_{x_2}z_{x_3}]_i(l) + \\ &\quad - \beta_{x_2}(l)q_{x_2}(l)E[z_{x_3}^2]_i(l) - \beta_{x_2}(l)E[z_{x_1}z_{x_3}]_i(l) + \\ &\quad + \gamma_{x_2}^2(l)q_{x_2}(l))\delta, \end{aligned} \quad (3.7.27)$$

$$\begin{aligned}
E[z_{x_2} z_{x_3}]_{i+1}(l) &= E[z_{x_2} z_{x_3}]_i(l) + (-\beta_{x_1}(l) E[z_{x_2} z_{x_3}]_i(l)) + \\
&\quad - \beta_{x_2}(l) E[z_{x_2} z_{x_3}]_i(l)) \delta,
\end{aligned}
\tag{3.7.28}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
E[z_{x_1}]_i(l) &= E[z_{x_1}](t_i, l), \quad E[z_{x_j}^2]_i(l) = E[z_{x_j}^2](t_i, l), \quad j = 1, 2, 3, \\
E[z_{x_1} z_{x_2}]_i &= E[z_{x_1} z_{x_2}](t_i), \quad E[z_{x_1} z_{x_3}]_i(l) = E[z_{x_1} z_{x_3}](t_i, l), \\
E[z_{x_2} z_{x_3}]_i(l) &= E[z_{x_2} z_{x_3}](t_i, l), \quad \delta = t_{i+1} - t_i = \text{const.}
\end{aligned}$$

3.8. Estymacja parametrów hybrydowych modeli umieralności

W celu estymacji parametrów proponowanego stochastycznego hybrydowego układu skorzystamy z metod literaturowych [64], [113], [114].

3.8.1. Estymacja parametrów hybrydowego modelu Lee–Cartera

Rozważmy rozszerzony, hybrydowy model Lee–Cartera (3.7.1)–(3.7.2). Proponujemy procedurę estymacji modelu EHLC według następujących etapów. Rozpoczynamy od identyfikacji czasów przełączeń τ_i , które rozdzielają przedziały czasowe $I_i = (\tau_{i-1}, \tau_i]$, odpowiadające różnym produktom („podmodelom”). Przedziały I_i określać będziemy mianem reżimów czasowych. Do identyfikacji punktów τ_i przełączeń pomiędzy reżimami wykorzystujemy metodę opisaną w paragrafie 4.4.3.

Przyjmijmy, że mamy do czynienia z dwoma punktami przełączenia τ_1, τ_2 . Wówczas możemy wyodrębnić trzy reżimy czasowe $I_1 = [1, \tau_1]$, $I_2 = (\tau_1, \tau_2]$, $I_3 = (\tau_2, T]$. W tym przypadku układ (3.7.2) ma postać

$$k(t) = \begin{cases} c_1 + \delta_1 t, & t = 1, 2, \dots, \tau_1, \\ c_2 + \delta_2 t, & t = \tau_1 + 1, \dots, \tau_2, \\ c_3 + \delta_3 t, & t = \tau_2 + 1, \dots, T, \end{cases} \tag{3.8.1}$$

gdzie $\delta_1, \delta_2, \delta_3, c_1, c_2, c_3$ są parametrami, szacowanymi metodą MNK.

Składniki σ_x^2 reprezentują parametry zmienności. Ich estymatorami są wariancje przyrostów $v_{x,t} = \ln m_{x,t+1} - \ln m_{x,t}$, czyli

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (v_{x,t} - \bar{v}_x)^2, \tag{3.8.2}$$

gdzie $\bar{v}_x$ jest średnią arytmetyczną ciągu $\{v_{x,t}\}$.

W celu oszacowania pozostałych parametrów, tj. b_x oraz q_x^2 , można zastosować algorytm minimalizacji następującej sumy kwadratów

$$\sum_{t=1}^T \ln m_{x,t} - \ln m_{x,t-1} + b_x[k(t) - k(t-1)] + \frac{1}{2} (q_x^2 - \sigma_x^2)^2, \quad (3.8.3)$$

przyjmując za $k(t)$, σ_x^2 wartości otrzymane w poprzednich etapach.

3.8.2. Estymacja parametrów uogólnionego, hybrydowego modelu Milewskiego–Promisłowa

Procedura iteracyjna dla modelu z liniowymi, skalarnymi filtrami

1° Przyjmujemy stałe warunki startowe, np. $E[z_{x_1}^2]_0 = 1$, $E[z_{x_1}z_{x_2}]_0 = 0$, $E[z_{x_1}z_{x_3}]_0 = 0$, $E[z_{x_2}^2]_0 = 1$, $E[z_{x_2}z_{x_3}]_0 = 0$, $E[z_{x_3}^2]_0 = 1$ oraz jako parametr warunek początkowy $E[z_{x_1}]_0 = p_1$.

2° Przyjmujemy warunki startowe dla parametrów $p_1 = \ln \mu_0$, α_x , β_{x_1} , β_{x_2} , q_{x_1} , q_{x_2} , γ_{x_1} , γ_{x_2} , np. $p_1 = 0, 1$, $\alpha_x = 0, 1$, $\beta_{x_1} = 0, 1$, $\beta_{x_2} = 0, 1$, $q_{x_1} = 1$, $q_{x_2} = 1$, $\gamma_{x_1} = 0, 01$, $\gamma_{x_2} = 0, 01$.

3° Obliczamy kolejne wielkości $E[z_{x_1}]_i$, $E[z_{x_1}^2]_i$, $E[z_{x_1}z_{x_2}]_i$, $E[z_{x_1}z_{x_3}]_i$, $E[z_{x_2}^2]_i$, $E[z_{x_2}z_{x_3}]_i$, $E[z_{x_3}^2]_i$ ze wzorów (3.7.15)–(3.7.18) dla $i = 1, 2, \dots$, przy ustalonych wartościach parametrów $p_1 = \ln \mu_0$, α_x , β_{x_1} , β_{x_2} , q_{x_1} , q_{x_2} , γ_{x_1} , γ_{x_2} .

4° Empiryczne wielkości $\hat{E}[z_{x_1}]_i$, $\hat{E}[z_{x_1}^2]_i$ bierzemy z tablic logarytmów cząstkowych współczynników zgonów i ich kwadratów, a następnie tworzymy kryterium estymacji parametrów

$$\begin{aligned} I = \sum_i [& (\hat{E}[z_{x_1}]_{i+1} - E[z_{x_1}]_i - \alpha_x)^2 + \\ & + (\hat{E}[z_{x_1}^2]_{i+1} - E[z_{x_1}^2]_i - (2\alpha_x E[z_{x_1}]_i - 2\beta_{x_1} q_{x_1} E[z_{x_1}z_{x_2}]_i + \\ & - 2\beta_{x_2} q_{x_2} E[z_{x_1}z_{x_3}]_i + (\gamma_{x_1} q_{x_1} + \gamma_{x_2} q_{x_2})^2)^2], \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

lub w uproszczonej postaci, tj. dla $q_{x_1} = q_{x_2} = 1$

$$\begin{aligned} I = \sum_i [& (\hat{E}[z_{x_1}]_{i+1} - E[z_{x_1}]_i - \alpha_x)^2 + \\ & + (\hat{E}[z_{x_1}^2]_{i+1} - E[z_{x_1}^2]_i - (2\alpha_x E[z_{x_1}]_i - 2\beta_{x_1} E[z_{x_1}z_{x_2}]_i + \\ & - 2\beta_{x_2} E[z_{x_1}z_{x_3}]_i + (\gamma_{x_1} + \gamma_{x_2})^2)^2]. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

5° Przeprowadzamy minimalizację kryterium (3.8.4) ze względu na parametry $p_1 = \ln \mu_0, \alpha_x, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, q_{x_1}, q_{x_2}, \gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$ lub kryterium (3.8.5) ze względu na parametry $p_1 = \ln \mu_0, \alpha_x, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$.

Procedura iteracyjna dla modelu z niezależnymi, liniowymi, skalarnymi filtrami

1° Przyjmujemy stałe warunki startowe, np. $E[z_{x_1}^2]_0 = 1, E[z_{x_1}z_{x_2}]_0 = 0, E[z_{x_1}z_{x_3}]_0 = 0, E[z_{x_2}^2]_0 = 1, E[z_{x_2}z_{x_3}]_0 = 0, E[z_{x_3}^2]_0 = 1$ oraz jako parametr warunek początkowy $E[z_{x_1}]_0 = p_1$.

2° Przyjmujemy warunki startowe dla parametrów $p_1 = \ln \mu_0, \alpha_x, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, q_{x_1}, q_{x_2}, \gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$, np. $p_1 = 0, 1, \alpha_x = 0, 1, \beta_{x_1} = 0, 1, \beta_{x_2} = 0, 1, q_{x_1} = 1, q_{x_2} = 1, \gamma_{x_1} = 0, 01, \gamma_{x_2} = 0, 01$.

3° Obliczamy kolejne wielkości $E[z_{x_1}]_i, E[z_{x_1}^2]_i, E[z_{x_1}z_{x_2}]_i, E[z_{x_1}z_{x_3}]_i, E[z_{x_2}^2]_i, E[z_{x_2}z_{x_3}]_i, E[z_{x_3}^2]_i$ ze wzorów (3.7.22)–(3.7.25) dla $i = 1, 2, \dots$, przy ustalonych wartościach parametrów $p_1 = \ln \mu_0, \alpha_x, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, q_{x_1}, q_{x_2}, \gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$.

4° Empiryczne wielkości $\hat{E}[z_{x_1}]_i, \hat{E}[z_{x_1}^2]_i$ bierzemy z tablic logarytmów kohortowych, cząstkowych współczynników zgonów i tworzymy kwadratowe kryterium estymacji parametrów

$$I = \sum_i [(\hat{E}[z_{x_1}]_{i+1} - E[z_{x_1}]_i - \alpha_x)^2 + (\hat{E}[z_{x_1}^2]_{i+1} - E[z_{x_1}^2]_i - (2\alpha_x E[z_{x_1}]_i - 2\beta_{x_1} q_{x_1} E[z_{x_1}z_{x_2}]_i - 2\beta_{x_2} q_{x_2} E[z_{x_1}z_{x_3}]_i + \gamma_{x_1}^2 q_{x_1}^2 + \gamma_{x_2}^2 q_{x_2}^2))^2] \quad (3.8.6)$$

lub w uproszczonej postaci dla $q_{x_1} = q_{x_2} = 1$

$$I = \sum_i [(\hat{E}[z_{x_1}]_{i+1} - E[z_{x_1}]_i - \alpha_x)^2 + (\hat{E}[z_{x_1}^2]_{i+1} - E[z_{x_1}^2]_i - (2\alpha_x E[z_{x_1}]_i - 2\beta_{x_1} E[z_{x_1}z_{x_2}]_i - 2\beta_{x_2} E[z_{x_1}z_{x_3}]_i + \gamma_{x_1}^2 + \gamma_{x_2}^2))^2]. \quad (3.8.7)$$

5° Przeprowadzamy minimalizację kryterium (3.8.6) za względu na parametry $p_1 = \ln \mu_0, \alpha_x, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, q_{x_1}, q_{x_2}, \gamma_{x_1}^2, \gamma_{x_2}^2$ lub kryterium (3.8.7) ze względu na parametry $p_1 = \ln \mu_0, \alpha_x, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \gamma_{x_1}^2, \gamma_{x_2}^2$.

Przy minimalizacji kryterium, jeśli zmieniamy wartość określonego parametru, wówczas należy przeliczyć wszystkie równania, aby otrzymać nowy komplet momentów we wszystkich iteracjach $i = 1, 2, \dots$

W tym ostatnim przypadku zauważmy, że w otrzymanym układzie równań momentów (3.7.22)–(3.7.25) nieznanymi parametrami, występującymi liniowo, są $p_1 = \ln \mu_0$, α_x , β_{x_1} , β_{x_2} , $\gamma_{x_1}^2$, $\gamma_{x_2}^2$.

Z budowy układu równań (3.7.22)–(3.7.25) wynika, że proces minimalizacji kryterium (3.8.5) można rozbić na dwie części, to znaczy

$$I = I_1 + I_2, \quad (3.8.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_i [(\hat{E}[z_{x_1}]_{i+1} - E[z_{x_1}]_i - \alpha_x)^2, \\ I_2 &= \sum_i (\hat{E}[z_{x_1}^2]_{i+1} - E[z_{x_1}^2]_i - (2\alpha_x E[z_{x_1}]_i + \\ &\quad - 2\beta_{x_1} E[z_{x_1} z_{x_2}]_i - 2\beta_{x_2} E[z_{x_1} z_{x_3}]_i + \gamma_{x_1}^2 + \gamma_{x_2}^2))^2]. \end{aligned} \quad (3.8.9)$$

Wówczas estymację nieznanymi parametrów można podzielić na dwa etapy. W pierwszym minimalizujemy kryterium I_1 ze względu na parametry $p_1 = \ln \mu_0$ oraz α_x . W drugim etapie, na podstawie otrzymanych oszacowań $\hat{p}_1$, $\hat{\alpha}_x$, minimalizujemy kryterium I_2 ze względu na parametry β_{x_1} , β_{x_2} , $\gamma_{x_1}^2$, $\gamma_{x_2}^2$.

3.9. Uwagi końcowe

Procedury iteracyjnej estymacji parametrów uogólnionego, hybrydowego modelu Milewskiego–Promisłowa, podane w paragrafie 3.8.2, zostały zastosowane do oszacowania parametrów modelu na podstawie danych rzeczywistych. W tym celu wykorzystane zostały cząstkowe współczynniki zgonów dla Polski za lata 1958–2000. Szczegółowe wyniki estymacji zamieszczono w rozdziale 6.

Bardzo ważnym zagadnieniem przy estymacji parametrów dynamicznych modeli hybrydowych jest estymacja czasów (punktów) przełączeń. Do tego celu wykorzystać można niektóre testy statystyczne. Jednym z takich testów jest test Janic–Ledwiny opisany w następnym rozdziale, w paragrafie 4.4.3.

Rozdział 4

Model Koissi–Shapiro oparty na skierowanych liczbach rozmytych

4.1. Wprowadzenie

W rozdziale 1 niniejszej monografii przedstawione zostały m.in. podstawy teoretyczne standardowego modelu Lee–Cartera, w którym przedmiotem modelowania są cząstkowe współczynniki zgonów $m_{x,t}$ dla rocznych grup wieku x i lat kalendarzowych t .

Główną trudnością, związaną z zastosowaniem modelu Lee–Cartera, jest założenie o jednorodności składnika losowego. Analiza reszt świadczy o tym, że założenie to zwykle nie jest spełnione. To może skutkować gorszym dopasowaniem modelu do niektórych grup wieku i wybranych lat. Co więcej wiadomo, iż empiryczne współczynniki zgonów jedynie aproksymują wartości rzeczywistego natężenia zgonów, które nie jest dokładnie znane (por. [91], paragraf 3.3). Oznacza to, że modelowany proces obserwowany jest tylko z pewnym przybliżeniem.

Wymienione trudności skłaniają do poszukiwania rozwiązań uwzględniających zarówno niejednorodność składnika losowego, jak i przybliżony charakter danych empirycznych. Jedną z możliwości jest traktowanie cząstkowych współczynników zgonów w kategoriach liczb rozmytych.

Próbe taką podjęli M. C. Koissi i A. F. Shapiro w artykule [59] z roku 2006, w którym przedstawili koncepcję rozmytego modelu Lee–Cartera (FLC – *Fuzzy Lee–Carter model*). W modelu tym cząstkowe współczynniki zgonów traktowane są w kategoriach liczb rozmytych. Rozmyte są także parametry modelu.

Rozmyty model Lee–Cartera, w wersji podanej przez Koissi i Shapiro, zakłada rozmytą reprezentację macierzy obserwacji. Pozwala to m.in. na uwzględnienie niepewności związanej z aproksymacją współczynników umieralności oraz na włączenie składnika losowego do rozmytej struktury modelu.

Estymacja parametrów modelu Koissi–Shapiro niesie jednak ze sobą problemy obliczeniowe, związane z działaniami na liczbach rozmytych

oraz pojawiającym się w tych działaniach operatorem $\max\{a, b\}$. Z tego powodu w monografii [91] przedstawiliśmy podejście odwołujące się do algebry skierowanych liczb rozmytych OFN (*Oriented Fuzzy Numbers*), zaproponowanej przez W. Kosińskiego z zespołem [61], [62]. Podejście to pozwala znacznie uprościć zadanie optymalizacyjne, a tym samym ułatwić estymację parametrów modelu umieralności.

Podstawowe pojęcia z zakresu liczb rozmytych i skierowanych liczb rozmytych, a także koncepcję rozszerzonego, rozmytego modelu Lee–Cartera EFLC (*Extended Fuzzy Lee–Carter model*) opartego na algebrze OFN, zostaną omówione w niniejszym rozdziale, natomiast po szczegóły dotyczące ogólnej teorii zbiorów rozmytych odsyłamy Czytelnika do książki [34].

4.2. Algebra skierowanych liczb rozmytych OFN

Za datę początkową teorii zbiorów rozmytych uznaje się rok 1965, w którym ukazała się praca Lofti Zadeha [115].

Klasyczny zbiór rozmyty jest pojęciem uogólniającym koncepcję zbioru, dopuszczającym częściową przynależność elementów do danego zbioru. Stopień przynależności jest wyrażony za pomocą funkcji, oznaczanej zwykle przez μ . Wartość 0 tej funkcji odpowiada nienależeniu, wartość 1 – „pełnej” przynależności, natomiast wartość pomiędzy 0 a 1 – „częściowej” przynależności danego elementu do zbioru rozmytego.

Obecnie zbiory rozmyte lub ich szczególny przypadek, tj. liczby rozmyte, są często stosowane. Są na przykład dobrym sposobem formalnej reprezentacji pojęć lingwistycznych, określonych w sposób nieprecyzyjny. Typowym przykładem są określenia używane w mowie potocznej, takie jak zimno, gorąco lub wysoki, niski itp.

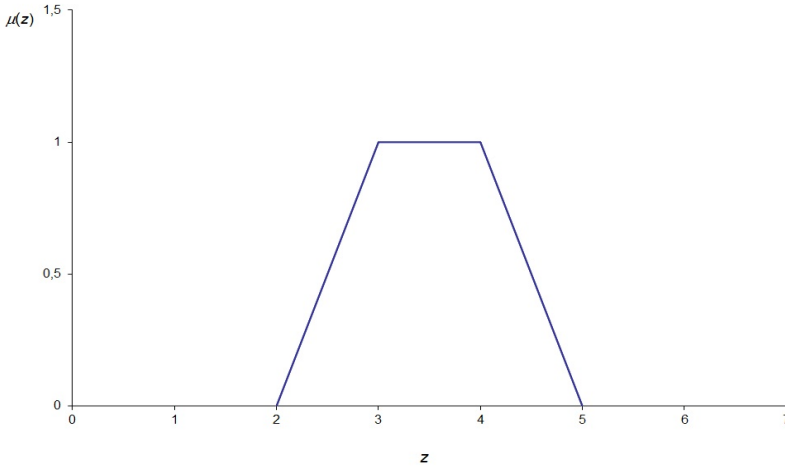
Definicja 4.1. Podzbiorem rozmytym A pewnej niepustej przestrzeni $\mathcal{X}$ nazywamy zbiór uporządkowanych par

$$A = \{\langle z, \mu_A(z) \rangle, z \in \mathcal{X}\}, \quad (4.2.1)$$

gdzie $\mu_A(z) : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności, przypisującą każdemu elementowi $z \in \mathcal{X}$ stopień przynależności do zbioru A .

Elementami przestrzeni $\mathcal{X}$ mogą być dowolnie zdefiniowane obiekty, np. osoby, pojęcia, przedmioty, liczby.

Dalej zakładamy będziemy, że $\mathcal{X} = \mathbf{R}$, gdzie $\mathbf{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych. Rysunek 4.1 przedstawia przykład funkcji przynależności $\mu_A(z)$ zbioru rozmytego A dla $z \in \mathbf{R}$.



Rys. 4.1. Przykład zbioru rozmytego $A = \{\langle z, \mu_A(z) \rangle, z \in \mathbf{R}\}$

Źródło: opracowanie własne

Definicja 4.2. ([34]) Rozmyty podzbiór A przestrzeni rzeczywistej $\mathbf{R}$ o funkcji przynależności $\mu_A(z) : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ nazywamy liczbą rozmytą, jeżeli:

- (i) A jest zbiorem normalnym, tzn. $\sup_{z \in \mathbf{R}} \mu_A(z) = 1$,
- (ii) A jest zbiorem rozmyto-wypukłym, tzn. zachodzi

$$\forall_{z_1, z_2 \in \mathbf{R}} \forall_{\lambda \in [0, 1]} \mu_A(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \geq \min\{\mu_A(z_1), \mu_A(z_2)\}, \quad (4.2.2)$$

- (iii) μ_A jest funkcją półciągłą z góry³,
- (iv) nośnik $\text{supp}A = \text{cl}\{z \in \mathbf{R} : \mu_A(z) > 0\}$ zbioru rozmytego A jest ograniczony, gdzie cl jest operatorem domknięcia.

Definicja 4.3. ([50]) Mówimy, że liczba rozmyta jest typu trójkątnego, jeśli jej funkcja przynależności ma postać

$$\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|a-z|}{l_A} & \text{dla } a - l_A \leq z < a, \\ 1 + \frac{|a-z|}{r_A} & \text{dla } a \leq z \leq a + r_A, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

gdzie $a \in \mathbf{R}, l_A, r_A > 0$.

Triątkularną liczbę rozmytą A , zwaną także liczbą trójkątną, zapisujemy

$$A = (a, l_A, r_A). \quad (4.2.4)$$

³ Mówimy, że funkcja rzeczywista f określona na pewnej przestrzeni topologicznej $\mathcal{X}$ jest półciągłą z góry, gdy zbiór $\{z \in \mathcal{X} : f(z) \geq \lambda\}$ jest domknięty dla każdego $\lambda \in \mathbf{R}$ ([51]).

Do znanych funkcji przynależności zaliczyć można, obok funkcji trójkątnych, także funkcje typu singleton, funkcje radialne czy elipsoidalne.

Definicja 4.4. Mówimy, że trójkątna liczba rozmyta $A = (a, l_A, r_A)$ jest symetryczna, jeżeli $l_A = r_A = s_A$. Wtedy liczbę rozmytą A oznaczamy (a, s_A) , gdzie a jest wartością centralną (*central value*), a s_A rozpiętością (*spread*) liczby rozmytej.

Definicja 4.5. λ -przekrojem liczby rozmytej A nazywamy zbiór A_λ , określony jako

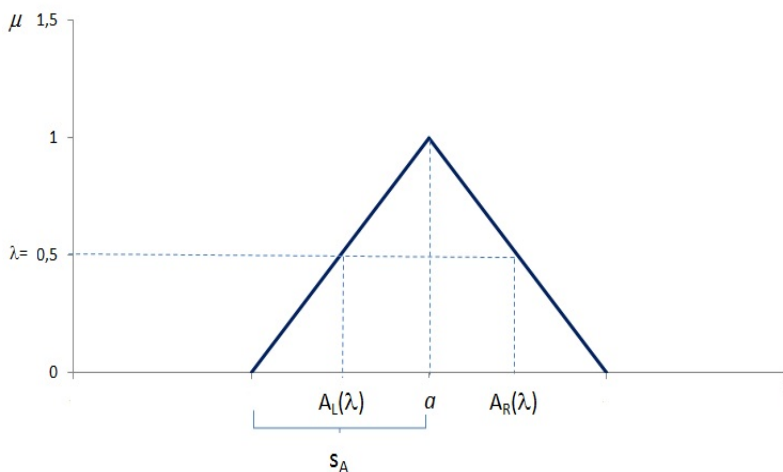
$$A_\lambda = \{z \in \mathbf{R} : \mu_A(z) \geq \lambda\} = [A_L(\lambda), A_R(\lambda)], \quad (4.2.5)$$

gdzie

$$A_L(\lambda) = \inf\{z \in \mathbf{R} : \mu_A(z) \geq \lambda\}, \quad (4.2.6)$$

$$A_R(\lambda) = \sup\{z \in \mathbf{R} : \mu_A(z) \geq \lambda\}. \quad (4.2.7)$$

Rysunek 4.2 przedstawia przykład λ -przekroju symetrycznej, trójkątnej liczby rozmytej $A = (a, s_A)$.



Rys. 4.2. Przykład trójkątnej, symetrycznej liczby rozmytej

$A = (a, s_A)$ i jej λ -przekroju $[A_L(\lambda), A_R(\lambda)]$

Źródło: opracowanie własne

Przykład 4.1. Jeżeli liczba rozmyta jest typu triangularnego, czyli może być zapisana jako $A = (a, l_A, r_A)$, to jej λ -przekrój A_λ ma postać

$$A_\lambda = [A_L(\lambda), A_R(\lambda)],$$

gdzie

$$A_L(\lambda) = a - l_A(1 - \lambda),$$

$$A_R(\lambda) = a + r_A(1 - \lambda).$$

W szczególnym przypadku, gdy A jest trójkątną, symetryczną liczbą rozmytą, tj. $A = (a, s_A)$

$$A_L(\lambda) = a - s_A(1 - \lambda),$$

$$A_R(\lambda) = a + s_A(1 - \lambda).$$

Definicja 4.6. ([97]) Dodawanie i mnożenie dwóch trójkątnych, symetrycznych liczb rozmytych $A = (a, s_A)$, $B = (b, s_B)$ określone jest następująco

$$A \oplus B = (a + b, \max(s_A, s_B)), \quad (4.2.8)$$

$$A \odot B = (ab, \max(s_A|b|, s_B|a|)). \quad (4.2.9)$$

Definicja 4.7. ([61]) Skierowaną liczbą rozmytą $\vec{A}$ nazywamy uporządkowaną parę

$$\vec{A} = (f, g), \quad (4.2.10)$$

gdzie $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ są funkcjami ciągłymi.

Funkcje f i g nazywamy odpowiednio częścią *up* i częścią *down* skierowanej liczby rozmytej. Z ciągłości obu części wynika, że ich obrazy są ograniczonymi przedziałami. Obrazy te określa się mianem odpowiednio UP oraz DOWN i oznacza symbolami

$$\text{UP} = (l_A, 1_A^-), \quad \text{DOWN} = (1_A^+, r_A). \quad (4.2.11)$$

Granice $l_A, 1_A^-, 1_A^+, r_A$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym zachodzi następujące przyporządkowanie

$$l_A := f(0), \quad 1_A^- := f(1), \quad 1_A^+ := g(1), \quad r_A := g(0). \quad (4.2.12)$$

W ogólnym przypadku nie muszą być spełnione relacje ([61], s. 47)

$$l_A \leq 1_A^-, \quad 1_A^+ \leq r_A. \quad (4.2.13)$$

Przymijmy dodatkowo na przedziale $[1_A^-, 1_A^+]$ funkcję stałą, równą 1. Wówczas sumę przedziałów

$$\text{UP} \cup [1_A^-, 1_A^+] \cup \text{DOWN} = (l_A, r_A) \quad (4.2.14)$$

możemy traktować jako nośnik liczby rozmytej A , rozumianej w sensie klasycznym.

W przypadku, gdy funkcje f, g są ściśle monotoniczne na przedziale $[0, 1]$, wówczas istnieją dla nich funkcje odwrotne f^{-1}, g^{-1} określone odpowiednio na przedziałach UP i DOWN. W takiej sytuacji związek funkcji przynależności μ_A liczby rozmytej A z funkcjami f, g liczby skierowanej $\vec{A}$ można przedstawić następująco

$$\mu_A(z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } z \in [1_A^-, 1_A^+], \\ f^{-1}(z) & \text{dla } z \in \text{UP}, \\ g^{-1}(z) & \text{dla } z \in \text{DOWN}, \\ 0 & \text{dla } z \notin (l_A, r_A). \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Przykład 4.2. Trójkątna liczba rozmyta $A = (a, l_A, r_A)$ koresponduje ze skierowaną liczbą rozmytą $\vec{A} = (f, g)$, gdzie

$$f(z) = a - l_A(1 - z), \quad g(z) = a + r_A(1 - z), \quad z \in [0, 1].$$

Jak wynika z przykładu 4.1, trójkątna liczba rozmyta $A = (a, l_A, r_A)$ ma λ -przekrój $A_\lambda = [A_L(\lambda), A_R(\lambda)]$, $\lambda \in [0, 1]$, gdzie

$$A_L(\lambda) = a - l_A(1 - \lambda), \quad A_R(\lambda) = a + r_A(1 - \lambda).$$

Podstawiając $z = \lambda$ i oznaczając $f(z) = A_L(z)$ oraz $g(z) = A_R(z)$, otrzymujemy

$$f(z) = a - l_A(1 - z), \quad g(z) = a + r_A(1 - z), \quad z \in [0, 1],$$

gdzie a, l_A, r_A są znanymi parametrami.

Ponieważ funkcje f, g są ciągłe na przedziale $[0, 1]$, więc uporządkowana para funkcji $\vec{A} = (f, g)$ określa skierowaną liczbę rozmytą.

Z powyższego wnioskujemy, że trójkątna, symetryczna liczba rozmyta $A = (a, s_A)$ generuje skierowaną liczbę rozmytą $\vec{A} = (f, g)$, z funkcjami

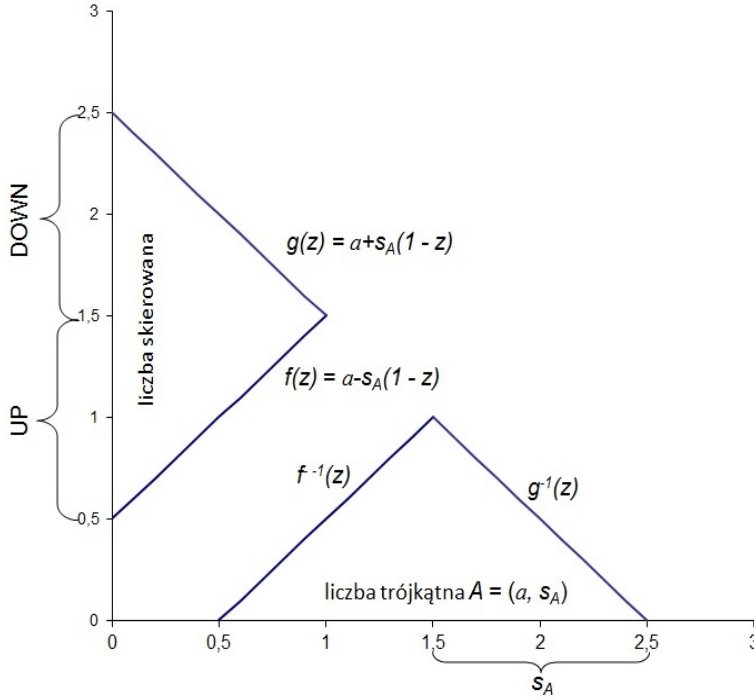
$$f(z) = a - s_A(1 - z), \quad g(z) = a + s_A(1 - z), \quad z \in [0, 1].$$

Rysunek 4.3 przedstawia przykład trójkątnej liczby rozmytej $A = (a, s_A)$ z funkcją przynależności

$$\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{a-z}{s_A} & \text{dla } z \in [a - s_A, a], \\ 1 + \frac{z-a}{s_A} & \text{dla } z \in (a, a + s_A], \\ 0 & \text{dla } z \notin [a - s_A, a + s_A] \end{cases}$$

oraz odpowiadającą jej skierowaną liczbę rozmytą $\vec{A} = (f, g)$, gdzie

$$f(z) = a - s_A(1 - z), \quad g(z) = a + s_A(1 - z) \quad z \in [0, 1].$$



Rys. 4.3. Trójkątna liczba rozmyta $A = (\frac{3}{2}, 1)$
oraz generowana przez nią liczba skierowana $\vec{A} = (f, g)$

Źródło: opracowanie własne

Definicja 4.8. ([32]) Metryka Diamonda dla skierowanych liczb rozmytych $\vec{A} = (f_A, g_A)$, $\vec{B} = (f_B, g_B)$ określona jest wzorem

$$D^2(\vec{A}, \vec{B}) = \int_0^1 (f_A(z) - f_B(z))^2 + (g_A(z) - g_B(z))^2 dz, \quad (4.2.16)$$

gdzie f_A, f_B, g_A, g_B są funkcjami całkowalnymi.

Definicja 4.9. Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte

$$\vec{A} = (f_A, g_A), \quad \vec{B} = (f_B, g_B), \quad \vec{C} = (f_C, g_C). \quad (4.2.17)$$

Liczba $\vec{C}$ jest sumą liczb $\vec{A}$ i $\vec{B}$, co zapisujemy $\vec{C} = \vec{A} \oplus \vec{B}$, jeśli

$$f_C(z) = f_A(z) + f_B(z), \quad g_C(z) = g_A(z) + g_B(z). \quad (4.2.18)$$

Definicja 4.10. Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte

$$\vec{A} = (f_A, g_A), \quad \vec{B} = (f_B, g_B), \quad \vec{C} = (f_C, g_C). \quad (4.2.19)$$

Liczba $\vec{C}$ jest iloczynem liczb $\vec{A}$ i $\vec{B}$, co zapisujemy $\vec{C} = \vec{A} \otimes \vec{B}$, jeśli

$$f_C(z) = f_A(z)f_B(z), \quad g_C(z) = g_A(z)g_B(z). \quad (4.2.20)$$

Definicja 4.11. Liczba $\vec{C} = (f_C, g_C)$ jest wynikiem mnożenia skierowanej liczby rozmytej $\vec{A} = (f_A, g_A)$ przez skalar d , co zapisujemy symbolicznie $\vec{C} = d\vec{A}$, jeśli

$$f_C(z) = df_A(z), \quad g_C(z) = dg_A(z). \quad (4.2.21)$$

Definicja 4.12. Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte

$$\vec{A} = (f_A, g_A), \quad \vec{B} = (f_B, g_B), \quad \vec{C} = (f_C, g_C). \quad (4.2.22)$$

Liczba $\vec{C}$ jest wynikiem dzielenia $\vec{A}$ przez $\vec{B}$, co zapisujemy symbolicznie $\vec{C} = \vec{A} \oslash \vec{B}$, jeżeli dla każdego argumentu $z \in [0, 1]$ takiego, że $f_B(z) = 0$ oraz $g_B(z) = 0$ zachodzi

$$f_C(z) = \frac{f_A(z)}{f_B(z)} \quad \text{oraz} \quad g_C(z) = \frac{g_A(z)}{g_B(z)}. \quad (4.2.23)$$

Przykład 4.3. Niech $A = (a, s_A)$ i $B = (b, s_B)$ będą trójkątnymi, symetrycznymi liczbami rozmytymi. Liczby te generują skierowane liczby rozmyte $\vec{A} = (f_A, g_A)$ oraz $\vec{B} = (f_B, g_B)$, gdzie

$$f_A(z) = a - s_A(1 - z), \quad g_A(z) = a + s_A(1 - z), \quad z \in [0, 1]$$

$$f_B(z) = b - s_B(1 - z), \quad g_B(z) = b + s_B(1 - z), \quad z \in [0, 1].$$

Możemy zapisać

$$\vec{A} \oplus \vec{B} = (f_A, g_A) \oplus (f_B, g_B) = (f_A + f_B, g_A + g_B),$$

gdzie

$$f_A(z) + f_B(z) = a + b - (s_A + s_B)(1 - z), \quad z \in [0, 1],$$

$$g_A(z) + g_B(z) = a + b + (s_A + s_B)(1 - z), \quad z \in [0, 1].$$

Analogicznie, mamy

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = (f_A, g_A) \otimes (f_B, g_B) = (f_A f_B, g_A g_B),$$

gdzie

$$f_A(z)f_B(z) = ab - (bs_A + as_B)(1 - z) + s_A s_B(1 - z)^2, \quad z \in [0, 1],$$

$$g_A(z)g_B(z) = ab + (bs_A + as_B)(1 - z) + s_A s_B(1 - z)^2, \quad z \in [0, 1].$$

Z kolei dla zadanej niezerowej liczby rzeczywistej d otrzymujemy na podstawie definicji 4.11

$$d\vec{A} = (df_A, dg_A),$$

gdzie

$$df_A(z) = d[a - s_A(1 - z)], \quad dg_A(z) = d[a + s_A(1 - z)], \quad z \in [0, 1].$$

Własność 4.1. Jeżeli $\vec{A} = (f_A, g_A)$ jest skierowaną liczbą rozmytą, to liczba rozmyta $-\vec{A}$ ma postać

$$-\vec{A} = (-f_A, -g_A). \quad (4.2.24)$$

Liczbę $-\vec{A}$ możemy potraktować jako wynik mnożenia $\vec{A}$ przez $d = -1$.

Własność 4.2. Niech będą dane dwie skierowane liczby rozmyte

$$\vec{A} = (f_A, g_A), \quad \vec{B} = (f_B, g_B). \quad (4.2.25)$$

Różnica liczb $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ ma postać

$$\vec{A} \ominus \vec{B} = (f_A - f_B, g_A - g_B). \quad (4.2.26)$$

Różnicę $\vec{A} \ominus \vec{B}$ możemy potraktować, jak dodanie do $\vec{A}$ liczby $\vec{B}$ pomnożonej przez skalar $d = -1$.

Własność 4.3. Jeżeli od liczby $\vec{A}$ odejmiemy liczbę $\vec{A}$, to w rezultacie otrzymamy

$$\vec{A} - \vec{A} = (f_A - f_A, g_A - g_A) = (0, 0). \quad (4.2.27)$$

Własność 4.4. Jeżeli $\vec{A} \oplus \vec{C}_1 = \vec{A} \oplus \vec{C}_2$, to $\vec{C}_1 = \vec{C}_2$.

Istotnie, niech

$$\vec{A} = (f_A, g_A), \quad \vec{C}_1 = (f_{C_1}, g_{C_1}), \quad \vec{C}_2 = (f_{C_2}, g_{C_2}).$$

Z definicji 4.9 mamy

$$\vec{A} \oplus \vec{C}_1 = (f_A, g_A) \oplus (f_{C_1}, g_{C_1}) = (f_A + f_{C_1}, g_A + g_{C_1}).$$

Analogiczny wynik otrzymujemy dla $\vec{A} \oplus \vec{C}_2$, czyli

$$\vec{A} \oplus \vec{C}_2 = (f_A, g_A) \oplus (f_{C_2}, g_{C_2}) = (f_A + f_{C_2}, g_A + g_{C_2}).$$

Z założonej równości $\vec{A} \oplus \vec{C}_1 = \vec{A} \oplus \vec{C}_2$ wynika

$$(f_A + f_{C_1}, g_A + g_{C_1}) = (f_A + f_{C_2}, g_A + g_{C_2})$$

lub

$$(f_A + f_{C_1}, g_A + g_{C_1}) - (f_A + f_{C_2}, g_A + g_{C_2}) = (0, 0),$$

czyli

$$(f_A + f_{C_1} - f_A - f_{C_2}, g_A + g_{C_1} - g_A - g_{C_2}) = (0, 0).$$

Z tego otrzymujemy

$$f_{C_1} - f_{C_2} = 0, \quad g_{C_1} - g_{C_2} = 0$$

lub równoważnie

$$f_{C_1} = f_{C_2}, \quad g_{C_1} = g_{C_2}.$$

Z powyższego mamy $\vec{C}_1 = \vec{C}_2$, co należało pokazać.

Własność 4.5. Jeżeli $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ są skierowanymi liczbami rozmytymi oraz $c, d \in \mathbf{R}$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to spełnione są następujące warunki

- (i) $c(d\vec{A}) = (cd)\vec{A}$,
- (ii) $d(\vec{A} \oplus \vec{B}) = d\vec{A} \oplus d\vec{B}$,
- (iii) $(c + d)\vec{A} = c\vec{A} \oplus d\vec{A}$,
- (iv) $1\vec{A} = \vec{A}$.

Warunek (i) wynika z definicji 4.11. Warunek (ii) wynika z definicji 4.9 i 4.11, tj. z definicji dodawania skierowanych liczb rozmytych i mnożenia ich przez skalar. Podobnie jest z warunkiem (iii). Również warunek (iv) wynika z własności mnożenia skierowanej liczby rozmytej przez skalar, który w tym przypadku wynosi 1.

Oznaczmy symbolem $\mathfrak{R}$ zbiór skierowanych liczb rozmytych, w którym wprowadzono operację dodawania skierowanych liczb rozmytych i mnożenia przez skalar, jak powyżej.

Własność 4.6. Jeżeli $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathfrak{R}$ są skierowanymi liczbami rozmytymi, to spełnione są następujące warunki

- (v) $\vec{A} \oplus \vec{B} = \vec{B} \oplus \vec{A}$ (przemienność dodawania),
- (vi) $(\vec{A} \oplus \vec{B}) \oplus \vec{C} = \vec{A} \oplus (\vec{B} \oplus \vec{C})$ (łączność dodawania),
- (vii) Jeżeli $\vec{A} \oplus \vec{B} = \vec{A} \oplus \vec{C}$, to $\vec{B} = \vec{C}$ (jednoznaczność odejmowania).

Warunki (i)–(vii) noszą nazwę aksjomatów przestrzeni liniowej. Przestrzeń $\mathfrak{R}$ jest rzeczywistą przestrzenią liniową, gdyż skalary, przez które mnożone są skierowane liczby rozmyte, są liczbami rzeczywistymi.

Niech $C([0, 1])$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych, określonych na odcinku domkniętym $[0, 1]$. Wówczas $\mathfrak{R} = C([0, 1]) \times C([0, 1])$ oznacza zbiór uporządkowanych par (f, g) funkcji ciągłych, z których każda określona jest na odcinku $[0, 1]$. Przestrzeń $\mathfrak{R}$ ma strukturę przestrzeni liniowej, gdyż spełniony jest zarówno aksjomat dodawania, jak i mnożenia przez skalar, określone jako

$$\vec{A} \oplus \vec{B} = (f_A + f_B, g_A + g_B) \quad (4.2.28)$$

oraz

$$d\vec{A} = (df_A, dg_A), \quad (4.2.29)$$

gdzie

$$\vec{A} = (f_A, g_A), \quad \vec{B} = (f_B, g_B), \quad d \in \mathbf{R}. \quad (4.2.30)$$

Przyjmijmy następującą definicję normy w przestrzeni $\mathfrak{R}$

$$\|(f, g)\| = \max(\sup_{z \in [0, 1]} |f(z)|, \sup_{z \in [0, 1]} |g(z)|). \quad (4.2.31)$$

Ponieważ odcinek $[0, 1]$ jest zwarty, więc funkcje ciągłe f i g przyjmują na nim swoje kresy, czyli $\sup_{z \in [0, 1]} |f(z)| < \infty$ oraz $\sup_{z \in [0, 1]} |g(z)| < \infty$, a tym samym $\|(f, g)\| < \infty$. Zachodzi również $\sup_{z \in [0, 1]} |f(z)| > 0$ dla $f(z) = 0$ i $\sup_{z \in [0, 1]} |g(z)| > 0$ dla $g(z) = 0$ oraz $\sup_{z \in [0, 1]} |f(z)| = 0$, gdy $\forall_{z \in [0, 1]} f(z) = 0$ i $\sup_{z \in [0, 1]} |g(z)| = 0$, gdy $\forall_{z \in [0, 1]} g(z) = 0$, czyli $\|(f, g)\| > 0$, gdy $(f, g) = (0, 0)$ oraz $\|(f, g)\| = 0$, gdy $(f, g) = (0, 0)$, zatem spełniony jest pierwszy aksjomat normy⁴.

Dla sprawdzenia drugiego aksjomatu normy, tj. warunku trójkąta, przyjmijmy

$$\vec{A} = (f_A, g_A) \quad \text{oraz} \quad \vec{B} = (f_B, g_B). \quad (4.2.32)$$

Zgodnie z przyjętą definicją normy mamy

$$\|\vec{A} \oplus \vec{B}\| = \max(\sup_{z \in [0, 1]} |f_{A \oplus B}(z)|, \sup_{z \in [0, 1]} |g_{A \oplus B}(z)|). \quad (4.2.33)$$

⁴ Aksjomaty normy (por. [60], s. 35):

- (i) $\|x\| > 0$ dla $x \neq 0$, $\|0\| = 0$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subaddytywność),
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (jednorodność).

Z drugiej strony zachodzi

$$f_{A\oplus B}(z) = f_A(z) + f_B(z), \quad (4.2.34)$$

a co za tym idzie

$$|f_{A\oplus B}(z)| = |f_A(z) + f_B(z)| \leq \sup_{z \in [0,1]} |f_A(z)| + \sup_{z \in [0,1]} |f_B(z)| \quad (4.2.35)$$

i w konsekwencji

$$\sup_{z \in [0,1]} |f_{A\oplus B}(z)| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|. \quad (4.2.36)$$

Analogicznie otrzymamy

$$\sup_{z \in [0,1]} |g_{A\oplus B}(z)| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|, \quad (4.2.37)$$

czyli

$$\max(\sup_{z \in [0,1]} |g_{A\oplus B}(z)|, \sup_{z \in [0,1]} |f_{A\oplus B}(z)|) \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|. \quad (4.2.38)$$

Mamy więc

$$\|\vec{A} \oplus \vec{B}\| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|, \quad \text{czyli warunek trójkąta.} \quad (4.2.39)$$

Sprawdzamy trzeci aksjomat normy, czyli warunek jednorodności

$$\|\alpha \vec{A}\| = \max(\sup_{z \in [0,1]} |\alpha f_A(z)|, \sup_{z \in [0,1]} |\alpha g_A(z)|). \quad (4.2.40)$$

Z własności modułu mamy

$$|\alpha f_A(z)| = |\alpha| |f_A(z)| \leq |\alpha| \sup_{z \in [0,1]} |f_A(z)| \leq |\alpha| \|\vec{A}\| \quad (4.2.41)$$

oraz

$$|\alpha g_A(z)| = |\alpha| |g_A(z)| \leq |\alpha| \sup_{z \in [0,1]} |g_A(z)| \leq |\alpha| \|\vec{A}\|. \quad (4.2.42)$$

Zatem zachodzi

$$\|\alpha \vec{A}\| \leq |\alpha| \|\vec{A}\|. \quad (4.2.43)$$

Jeżeli w tej nierówności zamiast $\vec{A}$ wstawimy $\frac{1}{\alpha} \vec{A}$, to otrzymamy

$$\|\vec{A}\| = \|\alpha \frac{1}{\alpha} \vec{A}\| = \|\frac{1}{\alpha} (\alpha \vec{A})\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha \vec{A}\|. \quad (4.2.44)$$

Stąd zaś mamy

$$\|\alpha \vec{A}\| \geq |\alpha| \|\vec{A}\|. \quad (4.2.45)$$

Zestawiając obydwie nierówności, dostajemy

$$\|\alpha \vec{A}\| = |\alpha| \|\vec{A}\|, \quad (4.2.46)$$

czyli otrzymujemy aksjomat jednorodności normy. Przestrzeń $\mathfrak{R}$ z normą, której własności sprawdzaliśmy, jest więc przestrzenią unormowaną.

Własność 4.7. Przestrzeń $\mathfrak{R}$ jest przestrzenią Banacha, jest bowiem przestrzenią unormowaną, zupełną⁵.

Własność 4.8. Przestrzeń skierowanych liczb rozmytych jest algebrą Banacha⁶ z jednością $\vec{\mathbb{I}} = (1, 1)$, tj. parą stałych funkcji, równych 1, przy czym zachodzi $\vec{A} \otimes \vec{\mathbb{I}} = \vec{\mathbb{I}} \otimes \vec{A} = \vec{A}$ dla każdego $\vec{A} \in \mathfrak{R}$.

Własność 4.9. Algebra $\mathfrak{R}$ jest komutatywna⁷, gdyż zachodzi

$$\begin{aligned} \vec{A} \otimes \vec{B} &= (f_A, g_A) \otimes (f_B, g_B) = (f_A f_B, g_A g_B) = \\ &= (f_B, g_B) \otimes (f_A, g_A) = \vec{B} \otimes \vec{A}, \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

dla dowolnych $\vec{A}, \vec{B} \in \mathfrak{R}$.

Własność 4.10. Algebra $\mathfrak{R}$ jest izomorficzna z algebrą liczb zespolonych.

Twierdzenie Gelfanda–Mazura ([3]). Jeśli algebra Banacha z jednością jest ciałem, to jest izometrycznie izomorficzna z ciałem liczb zespolonych; dokładniej każdy element A jest postaci λe , gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$, natomiast e jest jednością w ciele liczb zespolonych.

4.3. Model umieralności typu Koissi–Shapiro

W rozdziale 5 monografii [91] zaproponowany został rozszerzony model rozmyty umieralności Lee–Cartera (EFLC), będący zmodyfikowaną wersją modelu Koissi–Shapiro FLC [59], w której parametry modelu oraz

⁵ By przestrzeń unormowana $\mathfrak{R}$ była przestrzenią zupełną, potrzeba, aby każdy ciąg elementów przestrzeni $\mathfrak{R}$ spełniający warunek Cauchy’ego był zbieżny do punktu przestrzeni $\mathfrak{R}$. Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 22.3 w książce W. Kołodzieja [60], s. 44.

⁶ Algebrą Banacha nazywamy przestrzeń Banacha, w której jest określone mnożenie łączne, ciągle ze względu na każdą ze zmiennych z osobna (por. [117], s. 16).

⁷ Algebra $\mathfrak{R}$ jest komutatywna, jeżeli $\vec{A} \otimes \vec{B} = \vec{B} \otimes \vec{A}$.

elementy macierzy obserwacji wyrażone są za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Model ten ma postać

$$\vec{Y}_{x,t} = \vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t), \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.3.1)$$

gdzie $\vec{Y}_{x,t}$ są skierowanymi liczbami rozmytymi, reprezentującymi rozmyte logarytmy współczynników zgonów, natomiast $\vec{A}_x$, $\vec{B}_x$, $\vec{K}_t$ są parametrami modelu, będącymi również skierowanymi liczbami rozmytymi.

W oryginalnym modelu FLC Koissi-Shapiro przyjęto, że parametry A_x, B_x, K_t są liczbami rozmytymi z trójkątnymi, symetrycznymi funkcjami przynależności, o wartościach centralnych i rozpiętościach odpowiednio a_x, b_x, k_t oraz $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$. W przypadku modelu (4.3.1) przyjmujemy, że parametry są liczbami skierowanymi

$$\vec{A}_x = (f_{A_x}, g_{A_x}), \quad \vec{B}_x = (f_{B_x}, g_{B_x}), \quad \vec{K}_t = (f_{K_t}, g_{K_t}), \quad (4.3.2)$$

korespondującymi z trójkątnymi, symetrycznymi liczbami rozmytymi

$$A_x = (a_x, s_{A_x}), \quad B_x = (b_x, s_{B_x}), \quad K_t = (k_t, s_{K_t}). \quad (4.3.3)$$

Oznacza to, że funkcje definiujące liczby skierowane (4.3.2) są wyrażone wzorami, w których w roli parametrów występują wartości centralne i rozpiętości liczb trójkątnych (4.3.3). Mamy zatem dla $z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f_{A_x}(z) &= a_x - (1 - z)s_{A_x}, & g_{A_x}(z) &= a_x + (1 - z)s_{A_x}, \\ f_{B_x}(z) &= b_x - (1 - z)s_{B_x}, & g_{B_x}(z) &= b_x + (1 - z)s_{B_x}, \\ f_{K_t}(z) &= k_t - (1 - z)s_{K_t}, & g_{K_t}(z) &= k_t + (1 - z)s_{K_t}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Przyjmijmy dalej, że dysponujemy rozmytą reprezentacją logarytmów współczynników zgonów, w postaci liczb skierowanych $\vec{Y}_{x,t} = (f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}})$ korespondujących z symetrycznymi liczbami trójkątnymi $Y_{x,t} = (y_{x,t}, e_{x,t})$, wyznaczonymi w drodze rozmywania logarytmów współczynników zgonów (por. kolejny paragraf 4.4). Funkcje $f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}$, definiujące $\vec{Y}_{x,t}$, mają następującą postać

$$\begin{aligned} f_{Y_{x,t}}(z) &= y_{x,t} - e_{x,t}(1 - z), & z &\in [0, 1], \\ g_{Y_{x,t}}(z) &= y_{x,t} + e_{x,t}(1 - z), & z &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Po zastosowaniu definicji mnożenia, a następnie dodawania skierowanych liczb rozmytych, prawa strona (4.3.1) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t) &= (f_{A_x}, g_{A_x}) \oplus (f_{B_x \otimes K_t}, g_{B_x \otimes K_t}) = \\ &= (f_{A_x} + f_{B_x \otimes K_t}, g_{A_x} + g_{B_x \otimes K_t}), \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

gdzie dla $z \in [0, 1]$ mamy

$$\begin{aligned}
 f_{B_x \otimes K_t}(z) &= b_x k_t - (k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t})(1 - z) + s_{B_x} s_{K_t}(1 - z)^2, \\
 g_{B_x \otimes K_t}(z) &= b_x k_t + (k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t})(1 - z) + s_{B_x} s_{K_t}(1 - z)^2, \\
 f_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) &= \\
 &= a_x + b_x k_t - (s_{A_x} + k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t})(1 - z) + s_{B_x} s_{K_t}(1 - z)^2, \\
 g_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) &= \\
 &= a_x + b_x k_t + (s_{A_x} + k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t})(1 - z) + s_{B_x} s_{K_t}(1 - z)^2.
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Zauważmy, że wyrażenia $s_{B_x} s_{K_t}(1 - z)^2$ są bliskie 0 dla małych wartości s_{B_x} , s_{K_t} oraz dla $z \in [0, 1]$. Możemy zatem rozważać przybliżenie

$$\begin{aligned}
 f_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) &\approx a_x + b_x k_t - (s_{A_x} + k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t})(1 - z), \\
 g_{A_x}(z) + g_{B_x \otimes K_t}(z) &\approx a_x + b_x k_t + (s_{A_x} + k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t})(1 - z).
 \end{aligned}$$

Zakładając, że $s_{B_x} s_{K_t}(1 - z)^2 \approx 0$, skierowane liczby rozmyte $\vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t)$ korespondują z symetrycznymi liczbami trójkątnymi o wartościach centralnych $a_x + b_x k_t$ i rozpiętościach $s_{A_x} + k_t s_{B_x} + b_x s_{K_t}$.

4.4. Przełącznikowa fazyfikacja macierzy obserwacji

4.4.1. Metoda fazyfikacji obserwacji

Model umieralności w wersji zaproponowanej przez Koissi i Shapiro [59] zakłada rozmytą reprezentację macierzy obserwacji empirycznych. Idea fazyfikacji zostanie przeniesiona do modelu opartego na skierowanych liczbach rozmytych (por. także [91], s. 167–174). Ponieważ zagadnienie to jest kluczowe do modelowania umieralności na gruncie teorii liczb rozmytych, przedstawimy dalej propozycję metody fazyfikacji, opartą na idei Koissi–Shapiro.

Rozważania koncentrować się będą wokół zagadnienia rozmywania logarytmów cząstkowych współczynników zgonów $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$ dla ustalonych grup wieku x i lat kalendarzowych t .

Fazyfikacja zadanej wartości $y_{x,t}$ metodą Koissi-Shapiro polega na przekształceniu jej do postaci trójkątnej, symetrycznej liczby rozmytej

$$Y_{x,t} = (y_{x,t}, e_{x,t}),$$

gdzie $y_{x,t}$ pełni rolę wartości centralnej, natomiast $e_{x,t}$ jest nieznanym parametrem, definiowanym jako rozpiętość liczby rozmytej.

W celu znalezienia $e_{x,t}$, Koissi i Shapiro zdefiniowali symetryczne, trójkątne liczby rozmyte (c_{0x}, s_{0x}) , (c_{1x}, s_{1x}) , spełniające równości

$$(y_{x,t}, e_{x,t}) = (c_{0x}, s_{0x}) \oplus (c_{1x}, s_{1x}) \odot t \quad \text{dla każdego } x, \quad (4.4.1)$$

co na mocy definicji 4.6 jest równoznaczne z postulatem, że dla każdego x zachodzą równości

$$y_{x,t} = c_{0x} + c_{1x}t \quad \text{oraz} \quad e_{x,t} = \max(s_{0x}, s_{1x}t). \quad (4.4.2)$$

W naszej propozycji zagadnienie oszacowania parametrów rozmytości $e_{x,t}$ przeniesiemy na grunt skierowanych liczb rozmytych OFN. Zastępujemy zatem liczby trójkątne $(y_{x,t}, e_{x,t})$, (c_{0x}, s_{0x}) , (c_{1x}, s_{1x}) ich odpowiednikami postaci

$$\vec{Y}_{x,t} = (f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}), \quad \vec{C}_{0x} = (f_{C_{0x}}, g_{C_{0x}}), \quad \vec{C}_{1x} = (f_{C_{1x}}, g_{C_{1x}}),$$

gdzie $f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}$ są zdefiniowane w (4.3.5), natomiast funkcje $f_{C_{0x}}, g_{C_{0x}}, f_{C_{1x}}, g_{C_{1x}}$ mają postać

$$f_{C_{0x}}(z) = c_{0x} - s_{0x}(1 - z), \quad g_{C_{0x}}(z) = c_{0x} + s_{0x}(1 - z), \quad (4.4.3)$$

$$f_{C_{1x}}(z) = c_{1x} - s_{1x}(1 - z), \quad g_{C_{1x}}(z) = c_{1x} + s_{1x}(1 - z).$$

Zatem warunek (4.4.1) daje się teraz zastąpić następującym

$$(f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}) = (f_{C_{0x}}, g_{C_{0x}}) \oplus (f_{C_{1x}}, g_{C_{1x}}) \odot t \quad \text{dla każdego } x. \quad (4.4.4)$$

Z definicji 4.9, 4.11, dotyczących dodawania liczb skierowanych i mnożenia przez skalar, wynika, że dla każdego x oraz $z \in [0, 1]$ powinny zachodzić równości

$$\begin{aligned} (y_{x,t} - e_{x,t}(1 - z), y_{x,t} + e_{x,t}(1 - z)) &= (f_{C_{0x}}(z) + t f_{C_{1x}}(z), g_{C_{1x}}(z) + t g_{C_{1x}}(z)) = \\ &= (c_{0x} + c_{1x}t - (s_{0x} + s_{1x}t)(1 - z), c_{0x} + c_{1x}t + (s_{0x} + s_{1x}t)(1 - z)), \end{aligned}$$

co sprowadza się do postulatu, aby dla każdego x zachodziły równości

$$y_{x,t} = c_{0x} + c_{1x}t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.4.5)$$

$$e_{x,t} = s_{0x} + s_{1x}t, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (4.4.6)$$

Korzystając z (4.4.5), oszacowania wartości centralnych c_{0x} oraz c_{1x} można wyznaczyć klasyczną metodą MNK, która prowadzi do znanych formuł na estymatory parametrów liniowej funkcji trendu

$$\hat{c}_{1x} = \frac{\overline{t \ln m_{x,t}} - \bar{t} \overline{\ln m_{x,t}}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}, \quad \hat{c}_{0x} = \overline{\ln m_{x,t}} - \hat{c}_{1x} \bar{t}, \quad (4.4.7)$$

gdzie $\overline{\ln m_{x,t}}$, $\overline{t \ln m_{x,t}}$, $\bar{t}$, $\overline{t^2}$ oznaczają średnie arytmetyczne odpowiednich wyrażeń.

Pozostaje znalezienie oszacowań parametrów s_{0x}, s_{1x} występujących w (4.4.6). Tutaj jednak lewa strona, tj. $e_{x,t}$, nie jest znana, nie jest więc możliwe ponowne zastosowanie metody MNK.

Zauważmy jednak, że $e_{x,t}$ są z założenia liczbami nieujemnymi. Najmniejszą wartością, jaką mogą przyjąć jest 0. Znajdujemy więc takie wartości $\hat{s}_{0x}, \hat{s}_{1x}$, które dla ustalonego x minimalizują sumę

$$\sum_{t=1}^T e_{x,t} = T s_{0x} + s_{1x} \sum_{t=1}^T t, \quad (4.4.8)$$

przy warunkach ograniczających

$$\begin{aligned} s_{0x}, s_{1x} &\geq 0, \\ \hat{c}_{0x} + \hat{c}_{1x}t + (s_{0x} + s_{1x}t)(1-z) &\geq \ln m_{x,t}, \\ \hat{c}_{0x} + \hat{c}_{1x}t - (s_{0x} + s_{1x}t)(1-z) &\leq \ln m_{x,t}, \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

określonych dla każdego x i dla ustalonego $z \in [0, 1)$.

Ponieważ większe wartości z prowadzą do większych rozpiętości s_{0x}, s_{1x} , dlatego zakładamy dalej $z = 0$. Warto zauważyć, że kryterium to sprowadza się do analogicznego kryterium zaproponowanego w pracy [59]. Różnica występuje w sposobie obliczania parametrów $e_{x,t}$. W tym przypadku, przez analogię do (4.4.6), wartości $e_{x,t}$ otrzymujemy ze wzoru

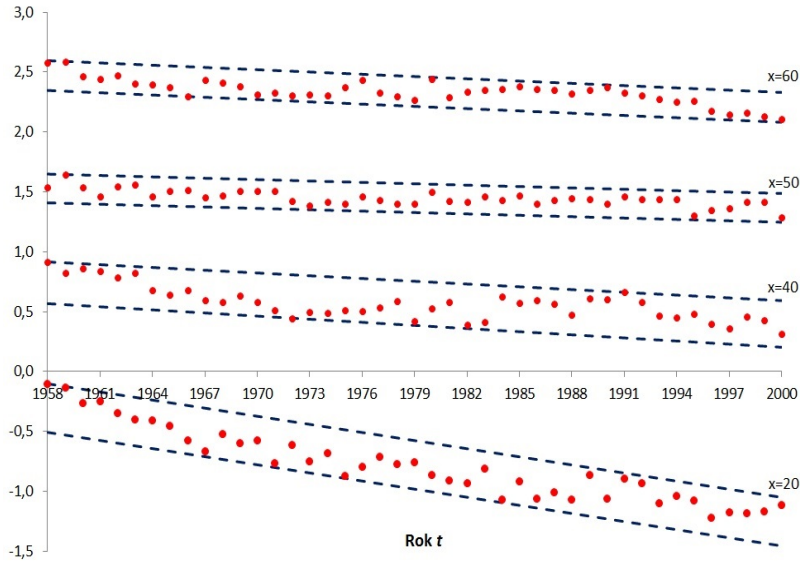
$$e_{x,t} \approx \hat{s}_{0x} + \hat{s}_{1x}t, \quad (4.4.10)$$

podczas gdy w modelu Koissi–Shapiro $e_{x,t}$ określone są wzorem (4.4.2).

Rysunek 4.4 ilustruje przykładowe cząstkowe współczynniki zgonów (po ich zlogarytmowaniu) oraz obszary rozmytości ograniczone liniami

$$f_{1x}(t) = c_{0x} + c_{1x}t - e_{x,t}, \quad f_{2x}(t) = c_{0x} + c_{1x}t + e_{x,t}.$$

Parametry rozmytości $e_{x,t}$ obliczone zostały ze wzoru (4.4.10), w którym oszacowania $\hat{s}_{0x}, \hat{s}_{1x}$ wyznaczono jako rozwiązanie zadania optymalizacyjnego (4.4.8)–(4.4.9).



Rys. 4.4. Wartości logarytmów cząstkowych współczynników zgonów oraz ich obszary rozmytości dla $x = 20, 40, 50, 60$ lat (kobiety)

Źródło: opracowanie własne

Z rysunku 4.4 wynika, że obszary rozmytości są nieco szersze w młodszych grupach wieku, co jest skutkiem większej zmienności współczynników zgonów w tych grupach.

Podsumowując, przedstawiona metoda fazyfikacji macierzy obserwacji zaproponowana została przez M. C. Koissi i A. F. Shapiro jako metoda przekształcania danych rzeczywistych (ostrych) w symetryczne, trójkątne liczby rozmyte. Zagadnienie to można także rozważać w sposób uproszczony, stosując algebrę skierowanych liczb rozmytych, dzięki czemu idea fazyfikacji staje się intuicyjnie bardziej zrozumiała.

4.4.2. Wykrywanie punktów przełączenia

Obserwacja cząstkowych współczynników umieralności, dokonana na przykładzie współczynników dla Polski od roku 1958, nasunęła przypuszczenie, że zmiany tych współczynników w niektórych grupach wieku lub

w niektórych okresach nie przebiegają według jednakowego wzorca, jak to zakłada metoda fazyfikacji Koissi–Shapiro. W takich przypadkach proste trendu używane podczas rozmywania logarytmów cząstkowych współczynników zgonów (por. formuła (4.4.5)) mogą nie być dostatecznie dobrze dopasowane do danych, a obszary rozmytości mogą być szerokie.

Przykład 4.4. Rozważmy logarytmy współczynników zgonów w subpopulacji kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat w Polsce w latach 1958–2014 (rysunek 4.5). Dopasowanie prostej trendu przedstawia rysunek 4.6.

Współczynniki $\hat{c}_{1x}, \hat{c}_{0x}$ funkcji trendu, wykreślonej na rysunku 4.6, wynoszą odpowiednio

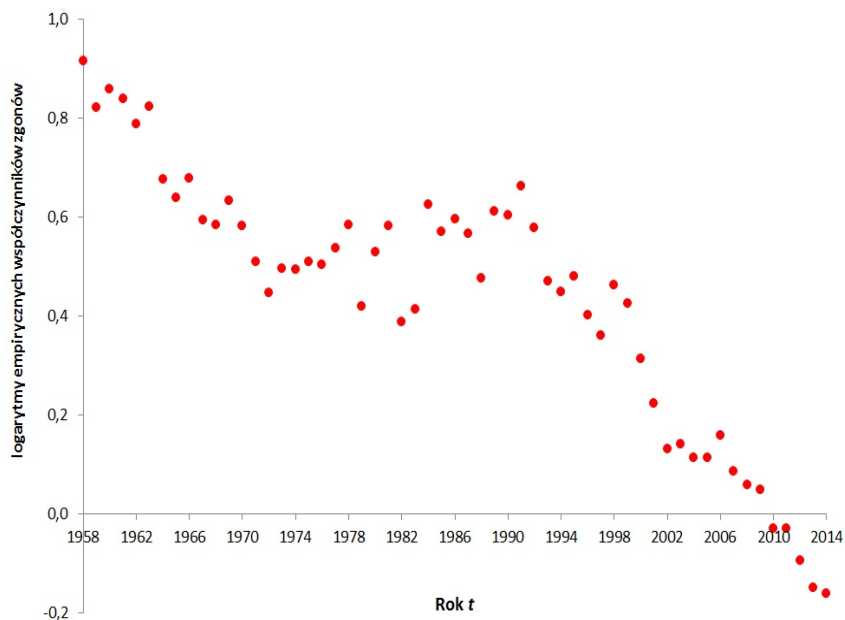
$$\hat{c}_{1x} \approx -0,0142, \quad \hat{c}_{0x} \approx 0,8515,$$

natomiast średni błąd przewidywania jest równy

$$S_e \approx 0,1236.$$

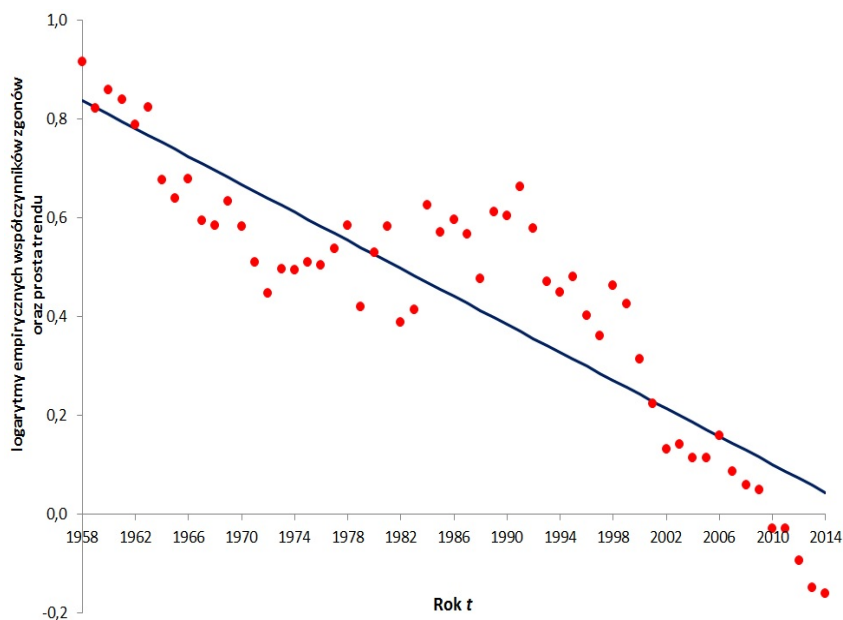
Oceniając wzrokowo układ punktów na rysunku 4.5, możemy przypuszczać, że od roku 1991 następuje zmiana kierunku trendu w odniesieniu do współczynników umieralności w badanej grupie kobiet.

Potwierdzają te spostrzeżenia wyniki dopasowania prostych trendu dla dwóch podokresów, tj. dla lat 1958–1990 oraz 1991–2014 (rysunek 4.7).



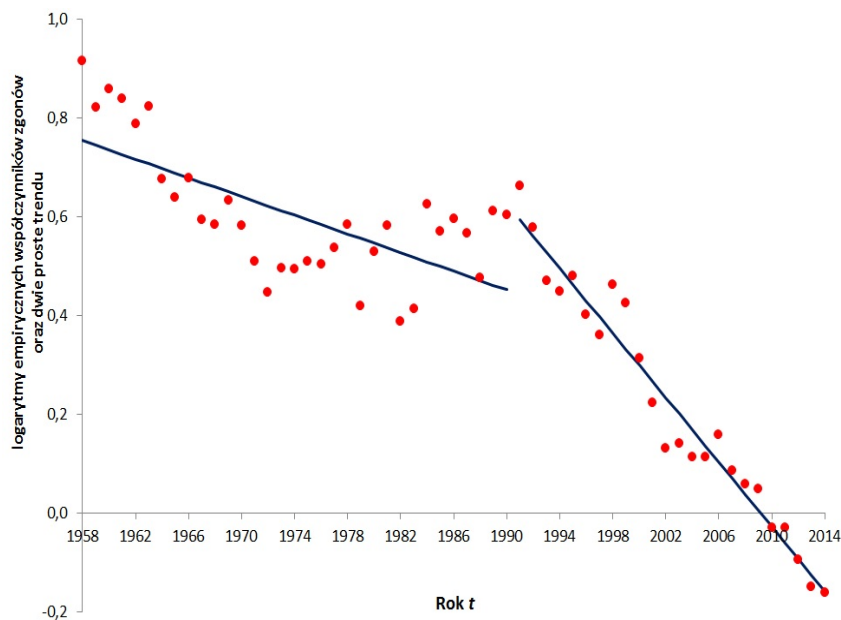
Rys. 4.5. Logarytmy współczynników zgonów dla kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat (okres obserwacji 1958–2014)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 4.6. Logarytmy współczynników zgonów dla kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat oraz dopasowana prosta trendu

Źródło: opracowanie własne



Rys. 4.7. Logarytmy współczynników zgonów dla kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat oraz proste trendu dla lat 1958–1990 oraz 1991–2014

Źródło: opracowanie własne

Współczynniki c_{1x}, c_{0x} oszacowane dla lat 1958–1990 wynoszą

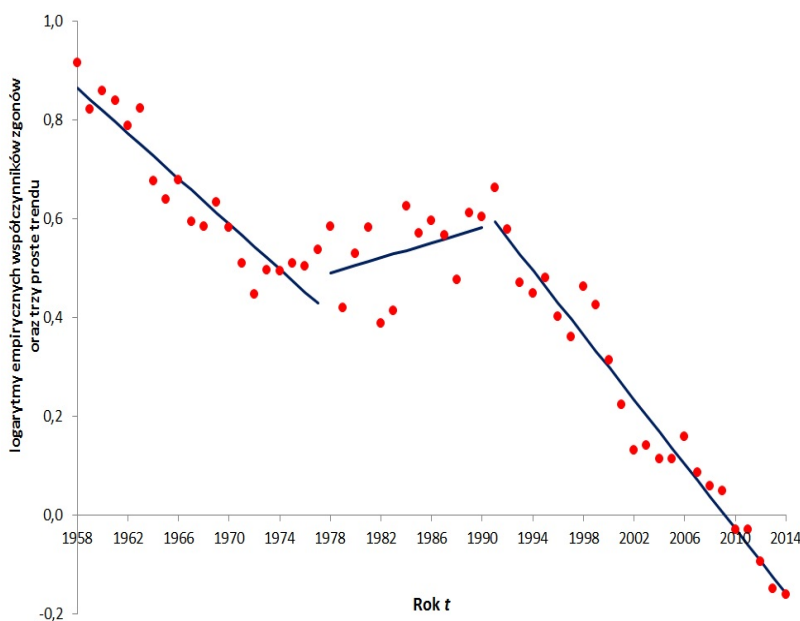
$$\hat{c}_{1x}^* \approx -0,0095, \quad \hat{c}_{0x}^* \approx 0,7636$$

natomiast średni błąd przewidywania $S_e^* \approx 0,1012$. Oceny współczynników c_{1x}, c_{0x} wyznaczone dla lat 1991–2014 są następujące

$$\hat{c}_{1x}^{**} \approx -0,0327, \quad \hat{c}_{0x}^{**} \approx 0,6256,$$

a średni błąd przewidywania jest równy $S_e^{**} \approx 0,0514$.

Przykład ten pokazuje, iż w przypadku kobiet w badanej grupie wieku i w analizowanym przedziale 1958–2014 warto wyróżnić dwa lub trzy podokresy (reżimy umieralności), w których „obowiązywały” inny kierunek i tempo zmian badanego zjawiska. Wydaje się, że potencjalnie istotnym rokiem w rozważanym przykładzie, od którego następuje zmiana kierunku funkcji trendu jest rok 1978, a następnie 1991 (por. rysunek 4.8).



Rys. 4.8. Logarytmy współczynników zgonów dla kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat oraz proste trendu oszacowane dla lat 1958–1977, 1978–1990 oraz 1991–2014

Źródło: opracowanie własne

Najpierw jednak należy ocenić, czy domniemane zmiany nie są przypadkowe i czy punkty zmiany zostały poprawnie uznane za „istotne”. Jeśli tak, wówczas wskazane stają się użycie kilku funkcji trendu jako podstawy rozmywania logarytmów cząstkowych współczynników zgonów, osobno w każdym z wyodrębnionych podokresów.

Przedstawiona dalej idea poszukiwania statystycznie istotnych punktów zmiany (przełączenia) oparta została na wykorzystaniu statystycznego testu adaptacyjnego Janic–Ledwiny (JL). Teoretyczne podstawy tego testu zaczerpnięte zostały z prac [4] oraz [53].

4.4.3. Podstawy teoretyczne testu JL

Założmy, że obserwujemy ciągle zmienne losowe $U_1, U_2, \dots, U_N$ w punktach czasowych $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Zmienne losowe U_t mają rozkłady o dystrybuancie F_t . Testujemy hipotezę zerową o jednakowych dystrybuantach rozkładu obserwowanych zmiennych

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_N, \quad (4.4.11)$$

przeciwko hipotezie alternatywnej

$$H_1 : \exists_{\eta \in (0,1)}, \quad F_1 = F_{[N\eta]} = F_{[N\eta+1]} = \dots = F_N \quad (4.4.12)$$

gdzie $[N\eta]$ oznacza część całkowitą liczby $N\eta$.

Statystyka M_N testu adaptacyjnego JL ma postać

$$M_N(e, p_N) = \max_{[eN] \leq m \leq [(1-e)N]} T(S(m, p_N); m), \quad (4.4.13)$$

gdzie:

N – liczebność próby,

$e \in [0, \frac{1}{2}]$ – ustalona wartość (przyjmujemy dalej $e = 0, 1$),

$p_N = 1, 5 \log N$ – liczba dodatnia, reprezentująca tzw. karę,

$S(m, p_N)$ – statystyki zdefiniowane wzorem

$$S(m, p_N) = \min\{k : 1 \leq k \leq d_N; T(k, m) - kp_N \geq T(l, m) - lp_N; l = 1, \dots, d_N\}, \quad (4.4.14)$$

d_N – liczba naturalna, reprezentująca złożoność problemu (przyjmujemy dalej $d_N = 10$),

$T(k, m)$ – statystyki zdefiniowane wzorem

$$T(k, m) = \sum_{n=1}^k L^2(m; b_n), \quad (4.4.15)$$

$L(m, b_n)$ – statystyki zdefiniowane wzorem

$$L(m, b_n) = \sum_{t=1}^N c_{mt} b_n \frac{R_t - 0,5}{N}, \quad (4.4.16)$$

R_t – ranga U_t w uporządkowanym niemalejąco ciągu $U_1, \dots, U_N$,

c_{mt} – współczynniki wagowe zdefiniowane wzorem

$$c_{mt} = \begin{cases} \frac{\overline{m(N-m)}}{N} \frac{1}{m}, & t = 1, 2, \dots, m, \\ -\frac{\overline{m(N-m)}}{N} \frac{1}{N-m}, & t = m+1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.4.17)$$

$b_n, n = 1, \dots, k$ – wielomiany Legendre’a, ortonormalne na odcinku $[0, 1]^8$.

Autorzy publikacji [53] wyznaczyli wartości krytyczne testu JL metodą Monte-Carlo. W przypadku, gdy $k = 1$, wówczas statystyka testu sprowadza się do statystyki rangowej testu Wilcoxona, dzięki czemu można korzystać z gotowych, stabilizowanych wartości krytycznych tego testu. Duże wartości statystyki M_N przemawiają za odrzuceniem hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1 .

4.4.4. Poszukiwanie punktu przełączenia funkcji trendu

Przechodząc do zagadnienia poszukiwania „punktów przełączenia” dla logarytmów cząstkowych współczynników zgonów, rozważać będziemy szeregi czasowe

$$\{U_{x,1}, U_{x,2}, \dots, U_{x,N}\}, \quad (4.4.18)$$

gdzie $U_{x,t} = y_{x,t+1} - y_{x,t}$, $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $x = 0, 1, \dots, X$.

Zmienne $U_{x,t}$ reprezentują przyrosty logarytmów cząstkowych współczynników zgonów dla zadanej grupy wieku x . Ponieważ mamy $T - 1$ różnic, a więc $N = T - 1$.

Propozycja zastosowania testu JL w tym problemie opiera się na następującej idei. Jeśli dla każdego t^* ($1 \leq t^* < T$) zmienne

$$U_{x,1}, U_{x,2}, \dots, U_{x,t^*} \quad (4.4.19)$$

mają jednakowe rozkłady prawdopodobieństwa, jak zmienne

$$U_{x,t^*+1}, U_{x,t^*+2}, \dots, U_{x,N}, \quad (4.4.20)$$

wówczas stwierdzimy brak punktu przełączenia, w przeciwnym przypadku istnieje co najmniej jeden taki punkt $m = t^*$.

⁸ Wielomianami Legendre’a nazywamy układ wielomianów $\{P_n(x)\}$ o wyrazie ogólnym $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n \{(x^2-1)^n\}}{dx^n}$, $n = 0, 1, \dots$

Zidentyfikowane punkty zmiany pozwolą na oszacowanie parametrów c_{0x} , c_{1x} , s_{0x} , s_{1x} w metodzie fazyfikacji obserwacji, osobno dla każdego z podokresów wyodrębnionych za pomocą punktów przełączenia. Przykładowo, w przypadku wykrycia jednego punktu przełączenia t^* , estymacji podlegać będą parametry c_{0x} , c_{1x} , $\tilde{c}_{0x}$, $\tilde{c}_{1x}$ dwóch funkcji trendu

$$y_{x,t} = c_{0x} + c_{1x}t, \quad t = 1, 2, \dots, t^* - 1, \quad (4.4.21)$$

$$y_{x,t} = \tilde{c}_{0x} + \tilde{c}_{1x}t, \quad t = t^*, \dots, T, \quad (4.4.22)$$

co prowadzi także do dwóch zestawów parametrów s_{0x} , s_{1x} oraz $\tilde{s}_{0x}$, $\tilde{s}_{1x}$, które szacujemy poprzez rozwiązanie zadania (4.4.8)–(4.4.9) osobno dla każdego z podokresów.

Zaproponowana koncepcja poszukiwania punktów zmiany, w połączeniu z metodą fazyfikacji, a także kolejne modyfikacje tej metody przedstawione w rozdziale 5, zostaną wykorzystane do rozmywania logarytmów współczynników zgonów.

Przykład 4.5. Rozważmy różnice $U_{x,t} = y_{x,t+1} - y_{x,t}$. Podstawą analizy w tym przykładzie będą logarytmy naturalne cząstkowych współczynników zgonów $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$ dla kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat, odnotowanych w Polsce w okresie 1958–2000 (tablica 4.1).

W pierwszej kolejności obliczymy statystyki $L(m, b_n)$ określone wzorem (4.4.16) dla $m = 1, 2, \dots, N - 1$ oraz $n = 1, 2, \dots, k$, $k \in \mathbf{N}$.

Dla $m = 1$ formuły (4.4.16)–(4.4.17), definiujące statystykę $L(1, b_n)$ i współczynniki c_{1t} , redukują się do postaci

$$L(1, b_n) = \sum_{t=1}^N c_{1t} b_n \frac{R_t - 0,5}{N}, \quad (4.4.23)$$

gdzie

$$c_{1t} = \begin{cases} \overline{\frac{N-1}{N}}, & t = 1, \\ -\overline{\frac{N-1}{N}} \frac{1}{N-1}, & t = 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (4.4.24)$$

W (4.4.23) występuje wielomian Legendre’a b_n , wyznaczany ze wzoru

$$b_n(z_t) = B_n(z_t) \sqrt{2n+1}. \quad (4.4.25)$$

Dla $n = 0, 1, 2$ wielomian B_n przyjmuje postać, odpowiednio

$$B_0(z_t) = 1, \quad B_1(z_t) = 2z_t - 1, \quad B_2(z_t) = \frac{1}{2} 3(2z_t - 1)^2 - 1, \quad (4.4.26)$$

natomiast dla $n = 3, 4, \dots$ wielomiany B_n wyznaczamy ze wzoru

$$B_{n+1}(z_t) = \frac{2n+1}{n+1}(2z_t - 1)B_n(z_t) - \frac{n}{n+1}B_{n-1}(z_t), \quad (4.4.27)$$

przy czym rolę argumentów z_t odgrywają wyrażenia

$$z_t = \frac{R_t - 0,5}{N}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4.28)$$

gdzie R_t są rangami obserwacji $U_{x,t}$ w uporządkowanej próbie.

Tablica 4.1. Współczynniki zgonów
w grupie kobiet w wieku $x = 40$ lat
w Polsce w latach 1958–2000

Rok	$\ln m_{x,t}$	Rok	$\ln m_{x,t}$
1958	0,9155	1979	0,4187
1959	0,8220	1980	0,5295
1960	0,8591	1981	0,5822
1961	0,8398	1982	0,3880
1962	0,7871	1983	0,4141
1963	0,8242	1984	0,6259
1964	0,6755	1985	0,5693
1965	0,6387	1986	0,5955
1966	0,6785	1987	0,5664
1967	0,5939	1988	0,4762
1968	0,5839	1989	0,6109
1969	0,6323	1990	0,6038
1970	0,5828	1991	0,6617
1971	0,5104	1992	0,5789
1972	0,4472	1993	0,4700
1973	0,4965	1994	0,4479
1974	0,4929	1995	0,4793
1975	0,5098	1996	0,4008
1976	0,5038	1997	0,3598
1977	0,5365	1998	0,4618
1978	0,5844	1999	0,4246
1979	0,4187	2000	0,3141

Źródło: obliczenia własne.

Przykłady obliczeń statystyki $L(m, b_1)$ osobno dla $m = 1$ i $m = 2$ w grupie kobiet w wieku $x = 40$ lat zamieszczono w tablicy 4.2. Warto zwrócić uwagę, że różnice w wartościach statystyk $L(1, b_1)$ i $L(2, b_1)$ wynikają wyłącznie ze zmian wartości współczynników c_{mt} .

Tablica 4.2. Obliczenia pomocnicze przy wyznaczaniu statystyk $L(1; b_1)$ i $L(2; b_1)$

Rok	$U_{x,t}$	R_t	z_t	$b_1(z_t)$	c_{1t}	$c_{1t}b_1(z_t)$	c_{2t}	$c_{2t}b_1(z_t)$
1959	-0,0935	6	0,13	-1,2784	0,9880	-1,2631	0,6901	-0,8822
1960	0,0371	32	0,75	0,8660	-0,0241	-0,0209	0,6901	0,5976
1961	-0,0192	21	0,49	-0,0412	-0,0241	0,0010	-0,0345	0,0014
1962	-0,0527	14	0,32	-0,6186	-0,0241	0,0149	-0,0345	0,0213
1963	0,0371	31	0,73	0,7835	-0,0241	-0,0189	-0,0345	-0,0270
1964	-0,1487	3	0,06	-1,5259	-0,0241	0,0368	-0,0345	0,0526
1965	-0,0368	18	0,42	-0,2887	-0,0241	0,0070	-0,0345	0,0100
1966	0,0399	33	0,77	0,9485	-0,0241	-0,0229	-0,0345	-0,0327
1967	-0,0847	8	0,18	-1,1135	-0,0241	0,0268	-0,0345	0,0384
1968	-0,0100	22	0,51	0,0412	-0,0241	-0,0010	-0,0345	-0,0014
1969	0,0484	35	0,82	1,1135	-0,0241	-0,0268	-0,0345	-0,0384
1970	-0,0496	15	0,35	-0,5361	-0,0241	0,0129	-0,0345	0,0185
1971	-0,0723	11	0,25	-0,8660	-0,0241	0,0209	-0,0345	0,0299
1972	-0,0632	12	0,27	-0,7835	-0,0241	0,0189	-0,0345	0,0270
1973	0,0493	36	0,85	1,1959	-0,0241	-0,0288	-0,0345	-0,0413
1974	-0,0037	25	0,58	0,2887	-0,0241	-0,0070	-0,0345	-0,0100
1975	0,0170	26	0,61	0,3712	-0,0241	-0,0089	-0,0345	-0,0128
1976	-0,0060	24	0,56	0,2062	-0,0241	-0,0050	-0,0345	-0,0071
1977	0,0327	30	0,70	0,7011	-0,0241	-0,0169	-0,0345	-0,0242
1978	0,0480	34	0,80	1,0310	-0,0241	-0,0248	-0,0345	-0,0356
1979	-0,1657	2	0,04	-1,6083	-0,0241	0,0388	-0,0345	0,0555
1980	0,1107	40	0,94	1,5259	-0,0241	-0,0368	-0,0345	-0,0526
1981	0,0528	37	0,87	1,2784	-0,0241	-0,0308	-0,0345	-0,0441
1982	-0,1942	1	0,01	-1,6908	-0,0241	0,0407	-0,0345	0,0583
1983	0,0261	27	0,63	0,4536	-0,0241	-0,0109	-0,0345	-0,0157
1984	0,2118	42	0,99	1,6908	-0,0241	-0,0407	-0,0345	-0,0583
1985	-0,0567	13	0,30	-0,7011	-0,0241	0,0169	-0,0345	0,0242
1986	0,0263	28	0,65	0,5361	-0,0241	-0,0129	-0,0345	-0,0185
1987	-0,0291	19	0,44	-0,2062	-0,0241	0,0050	-0,0345	0,0071
1988	-0,0902	7	0,15	-1,1959	-0,0241	0,0288	-0,0345	0,0413
1989	0,1346	41	0,96	1,6083	-0,0241	-0,0388	-0,0345	-0,0555
1990	-0,0071	23	0,54	0,1237	-0,0241	-0,0030	-0,0345	-0,0043
1991	0,0579	38	0,89	1,3609	-0,0241	-0,0328	-0,0345	-0,0470
1992	-0,0828	9	0,20	-1,0310	-0,0241	0,0248	-0,0345	0,0356
1993	-0,1089	5	0,11	-1,3609	-0,0241	0,0328	-0,0345	0,0470
1994	-0,0221	20	0,46	-0,1237	-0,0241	0,0030	-0,0345	0,0043
1995	0,0314	29	0,68	0,6186	-0,0241	-0,0149	-0,0345	-0,0213
1996	-0,0785	10	0,23	-0,9485	-0,0241	0,0229	-0,0345	0,0327
1997	-0,0410	16	0,37	-0,4536	-0,0241	0,0109	-0,0345	0,0157
1998	0,1021	39	0,92	1,4434	-0,0241	-0,0348	-0,0345	-0,0498
1999	-0,0372	17	0,39	-0,3712	-0,0241	0,0089	-0,0345	0,0128
2000	-0,1105	4	0,08	-1,4434	-0,0241	0,0348	-0,0345	0,0498
Suma					×	-1,2939	×	-0,2988

Źródło: obliczenia własne.

Sumy wyrazów w kolumnach 7 i 9 tablicy 4.2 przedstawiają wartości statystyk odpowiednio $L(1; b_1)$ i $L(2; b_1)$. Mamy zatem

$$L(1, b_1) = -1,2939, \quad L(2, b_1) = -0,2988$$

$$L^2(1, b_1) = 1,6742, \quad L^2(2, b_1) = 0,0893.$$

Statystyka $L^2(1, b_1)$ jest komponentem statystyki $T(k, 1)$, natomiast statystyka $L^2(2, b_1)$ jest komponentem statystyki $T(k, 2)$. Ogólną definicję zmiennej $T(k, m)$ dla zadanych wartości k i m podaje wzór (4.4.15).

W przypadku, gdy $k = 1$ oraz $m = 1$ statystyka $T(k, m)$ redukuje się do postaci

$$T(1, 1) = L^2(1, b_1).$$

Dla $k = 1$ oraz $m = 2$ mamy z kolei

$$T(1, 2) = L^2(2, b_1).$$

W podobny sposób możemy obliczyć statystyki $L(m, b_1)$ i odpowiadające im zmienne $T(1, m)$ dla $k = 1$ i $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

Ze względu na definicję statystyki testu (4.4.13), interesować nas będą dalej wartości statystyk $T(1, m)$ oraz dla indeksu m spełniającego nierówność podwójną

$$[eN] \leq m \leq [(1 - e)N],$$

gdzie $e = 0, 1$. W przypadku, gdy $N = 42$ otrzymujemy

$$5 \leq m \leq 37.$$

Wartości statystyk $T(1, m)$, $m = 5, 6, \dots, 37$ przedstawia tablica 4.3.

Obliczenia statystyk $T(2, m)$ dla $m = 5, 6, \dots, 37$ dokonujemy następująco. Mamy

$$T(2, m) = L^2(m, b_1) + L^2(m, b_2),$$

gdzie $L(m, b_n)$ są zdefiniowane wzorem (4.4.16). Z kolei wielomiany b_1, b_2 określone są wzorami

$$b_1(z_t) = \sqrt{3}(2z_t - 1), \quad b_2(z_t) = \sqrt{5} \left(\frac{3}{2}(2z_t - 1)^2 - \frac{1}{2} \right),$$

gdzie

$$z_t = \frac{R_t - 0,5}{N}, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Zestawienie wartości $L(m, b_1)$, $L(m, b_2)$, $T(2, m)$ przedstawia tablica 4.4.

Tablica 4.3. Zestawienie wartości
 $L(m, b_1)$, $T(1, m)$, $m = 5, \dots, 37$

m	$L(m, b_1)$	$T(1, m)$
5	-0,1375	0,0189
6	-0,8001	0,6402
7	-0,8708	0,7583
8	-0,4537	0,2059
9	-0,8529	0,7275
10	-0,8068	0,6509
11	-0,3908	0,1527
12	-0,5634	0,3175
13	-0,8396	0,7050
14	-1,0799	1,1662
15	-0,6773	0,4587
16	-0,5766	0,3324
17	-0,4537	0,2059
18	-0,3858	0,1488
19	-0,1662	0,0276
20	0,1529	0,0234
21	-0,3436	0,1181
22	0,1274	0,0162
23	0,5242	0,2748
24	0,0000	0,0000
25	0,1426	0,0203
26	0,6814	0,4643
27	0,4648	0,2160
28	0,6479	0,4198
29	0,5919	0,3503
30	0,1972	0,0389
31	0,7671	0,5884
32	0,8367	0,7000
33	1,3802	1,9050
34	1,0371	1,0756
35	0,5293	0,2802
36	0,5092	0,2593
37	0,8449	0,7139

Źródło: obliczenia własne.

Postępując w podobny sposób dla $k = 3, 4, \dots$ oraz $m = 5, 6, \dots, 37$, otrzymujemy wartości statystyk $T(k, m)$ (tablica 4.5).

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie dla każdego m wartości statystyki $S(m, p_N)$ danej wzorem (4.4.14). Statystyka $S(m, p_N)$ dla ustalonego m równa jest najmniejszej wartości k^* indeksu k ($k = 1, 2, \dots, d_N$), dla której różnica $T(k, m) - kp_N$ jest największa.

Tablica 4.4. Zestawienie wartości
 $L(m, b_1)$, $L(m, b_2)$, $T(2, m)$, $m = 5, \dots, 37$

m	$L(m, b_1)$	$L(m, b_2)$	$T(2, m)$
5	-0,1375	-0,8601	0,7586
6	-0,8001	-0,1409	0,6601
7	-0,8708	-0,5563	1,0678
8	-0,4537	-0,5718	0,5329
9	-0,8529	-0,4462	0,9266
10	-0,8068	-0,8340	1,3464
11	-0,3908	-0,7136	0,6619
12	-0,5634	-0,9664	1,2514
13	-0,8396	-1,0374	1,7813
14	-1,0799	-1,1585	2,5082
15	-0,6773	-0,9846	1,4282
16	-0,5766	-1,2969	2,0145
17	-0,4537	-1,5860	2,7212
18	-0,3858	-1,9067	3,7842
19	-0,1662	-2,0718	4,3199
20	0,1529	-2,0428	4,1963
21	-0,3436	-1,4928	2,3465
22	0,1274	-1,0355	1,0885
23	0,5242	-0,8190	0,9455
24	0,0000	-0,1755	0,0308
25	0,1426	-0,4559	0,2282
26	0,6814	0,1998	0,5042
27	0,4648	0,0196	0,2164
28	0,6479	-0,2407	0,4777
29	0,5919	-0,6025	0,7133
30	0,1972	-0,4520	0,2432
31	0,7671	0,1584	0,6135
32	0,8367	-0,2351	0,7553
33	1,3802	0,1144	1,9181
34	1,0371	0,1474	1,0974
35	0,5293	0,5500	0,5827
36	0,5092	0,1006	0,2694
37	0,8449	-0,2199	0,7622

Źródło: obliczenia własne.

Parametr p_N określamy na podstawie wzoru

$$p_N = 1,5 \ln(N) = 1,5 \ln(42) \approx 5,61,$$

natomiast za wartość parametru d_N przyjmujemy dalej liczbę 10 (za [53]).

Wartości $T(k, m)$ dla $k = 3, 4, \dots, d_N$ zamieszczone są w tablicy 4.5, natomiast tablica 4.6 zawiera zestawienie różnic $T(k, m) - kp_N$ oraz wartości statystyki $S(m, p_N)$ dla $k = 1, 2, \dots, d_N$ oraz $m = 5, 6, \dots, 37$.

Tablica 4.5. Zestawienie wartości statystyk $T(k, m)$, $k = 3, \dots, 10$, $m = 5, \dots, 37$

m	$T(k, m)$							
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
5	0,9267	1,7483	2,0939	2,0939	2,9248	2,9277	5,8176	5,8231
6	1,3520	2,1503	2,1509	2,1509	4,5209	5,0748	6,1496	6,2405
7	1,3381	1,4499	1,4862	1,4862	5,0686	5,4595	7,5431	7,5773
8	1,3803	1,7862	1,8306	1,8306	6,8936	7,1247	10,038	10,4501
9	1,2658	2,6588	2,7375	2,7375	5,7573	5,7573	9,0131	9,7243
10	1,7007	2,3980	2,4151	2,4151	4,9796	5,1454	7,8567	9,2966
11	1,3934	2,5297	2,5325	2,5325	6,2929	6,9749	9,0355	10,9292
12	1,4816	2,3959	2,4137	2,4137	7,0958	7,3029	9,4206	10,3077
13	1,7881	3,3140	3,5862	3,5862	6,9205	7,0415	8,1072	9,5486
14	2,6020	4,7308	5,5466	5,5466	8,2464	8,2545	8,6556	10,2335
15	1,4426	5,2268	5,8376	5,8376	9,2229	9,4829	9,5565	10,9032
16	2,0212	4,4868	4,8554	4,8554	7,0228	7,3360	7,3447	8,4891
17	2,8288	4,4745	4,7713	4,7713	5,9781	6,1925	6,3603	7,0330
18	4,0043	4,9293	5,0142	5,0142	5,6768	6,0986	6,6259	7,4652
19	5,0063	6,2539	6,6442	6,6442	7,2939	7,3928	7,5989	8,2147
20	5,4609	7,5609	8,2483	8,2483	9,6650	9,9934	10,1295	11,4057
21	4,9719	6,1165	6,7412	6,7412	8,8118	8,8353	9,6520	12,5092
22	2,7919	3,7694	3,9520	3,9520	4,8603	4,9715	5,2511	8,6941
23	2,8865	4,9621	4,9864	4,9864	5,9325	5,9334	6,8463	9,1806
24	4,4906	6,4617	7,0780	7,0780	7,2847	7,4196	7,9331	10,0277
25	6,0775	7,1514	7,8739	7,8739	7,8906	7,9120	8,7812	10,0214
26	3,4641	3,5774	5,8252	5,8252	6,2664	6,5731	7,9923	9,0625
27	2,0868	2,3624	5,8498	5,8498	6,3075	6,3546	8,5621	9,4037
28	3,4637	3,5232	7,8305	7,8305	8,0092	8,0221	10,4742	10,7785
29	3,2992	3,7175	7,1394	7,1394	7,6665	7,6742	9,2476	9,6996
30	2,3554	2,3680	5,5344	5,5344	5,7905	6,0790	6,9078	7,2776
31	1,4747	1,8014	4,9894	4,9894	5,0449	5,0506	5,1573	6,7546
32	1,8784	2,8958	5,0879	5,0879	5,0891	5,2639	5,6174	8,1620
33	3,0548	3,5118	4,5960	4,5960	4,6490	4,9207	5,9439	7,1763
34	1,6361	1,6869	3,5109	3,5109	4,0481	4,8135	6,1667	8,7338
35	1,2399	1,6408	2,4105	2,4105	2,6407	3,6767	4,3030	5,4855
36	0,8162	1,1686	1,4118	1,4118	1,4774	3,7230	4,0036	6,2890
37	2,5332	3,6750	4,5559	4,5559	4,7973	5,9429	6,0956	7,5271

Źródło: obliczenia własne.

Tablica 4.6. Zestawienie wartości statystyk $T(k, m) - kp_N$, $k^* = S(m, p_N)$

m	$T(k, m) - kp_N$										k^*
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	
5	-5,6	-10,5	-15,9	-20,9	-26,3	-31,5	-36,3	-41,9	-44,6	-50,2	1
6	-5,0	-10,6	-15,5	-20,8	-25,9	-31,5	-34,7	-39,8	-44,3	-49,8	1
7	-4,8	-10,1	-15,5	-21,1	-26,6	-32,2	-34,2	-39,4	-42,9	-48,5	1
8	-5,4	-10,7	-15,4	-20,7	-26,2	-31,8	-32,4	-37,7	-40,4	-45,6	1
9	-4,9	-10,3	-15,6	-20,1	-25,4	-30,9	-33,5	-39,1	-41,4	-46,3	1
10	-5,0	-9,9	-15,1	-20,4	-25,6	-31,2	-34,3	-39,7	-42,6	-46,8	1
11	-5,5	-10,6	-15,4	-20,0	-25,5	-31,1	-33,0	-37,9	-41,4	-45,1	1
12	-5,3	-10,0	-15,3	-20,0	-25,6	-31,2	-32,1	-37,5	-41,0	-45,8	1
13	-4,9	-9,4	-15,0	-19,2	-24,7	-30,1	-32,3	-37,8	-42,4	-46,5	1
14	-4,4	-8,7	-14,2	-17,9	-23,3	-28,1	-31,0	-36,6	-41,8	-45,8	1
15	-5,1	-9,8	-15,4	-17,8	-22,8	-27,8	-30,0	-35,4	-40,9	-45,2	1
16	-5,3	-9,2	-14,8	-18,2	-23,5	-28,8	-32,2	-37,5	-43,1	-47,6	1
17	-5,4	-8,5	-14,0	-18,0	-23,6	-28,9	-33,3	-38,7	-44,1	-49,0	1
18	-5,5	-7,4	-12,8	-17,5	-23,1	-28,6	-33,6	-38,8	-43,8	-48,6	1
19	-5,6	-6,9	-11,8	-16,3	-21,8	-27,0	-32,0	-37,5	-42,9	-47,9	1
20	-5,6	-7,0	-11,4	-14,9	-20,5	-25,4	-29,6	-34,9	-40,3	-44,7	1
21	-5,5	-8,9	-11,8	-16,3	-21,9	-26,9	-30,4	-36,0	-40,8	-43,6	1
22	-5,6	-10,1	-14,0	-18,7	-24,3	-29,7	-34,4	-39,9	-45,2	-47,4	1
23	-5,3	-10,3	-13,9	-17,8	-23,1	-28,7	-33,3	-38,9	-43,6	-46,9	1
24	-5,6	-11,2	-12,3	-17,6	-21,6	-26,6	-32,0	-37,4	-42,5	-46,0	1
25	-5,6	-11,0	-10,7	-16,1	-20,9	-25,8	-31,4	-36,9	-41,7	-46,0	1
26	-5,1	-10,7	-13,4	-18,9	-24,5	-27,8	-33,0	-38,3	-42,5	-47,0	1
27	-5,4	-11,0	-14,7	-20,3	-25,7	-27,8	-32,9	-38,5	-41,9	-46,7	1
28	-5,2	-10,7	-13,4	-18,9	-24,5	-25,8	-31,2	-36,8	-40,0	-45,3	1
29	-5,3	-10,5	-13,5	-18,8	-24,3	-26,5	-31,6	-37,2	-41,2	-46,4	1
30	-5,6	-11,0	-14,5	-20,1	-25,7	-28,1	-33,5	-38,8	-43,6	-48,8	1
31	-5,0	-10,6	-15,3	-20,7	-26,2	-28,6	-34,2	-39,8	-45,3	-49,3	1
32	-4,9	-10,5	-14,9	-19,7	-25,1	-28,6	-34,2	-39,6	-44,8	-47,9	1
33	-3,7	-9,3	-13,8	-18,9	-24,5	-29,0	-34,6	-39,9	-44,5	-48,9	1
34	-4,5	-10,1	-15,2	-20,7	-26,3	-30,1	-35,2	-40,0	-44,3	-47,3	1
35	-5,3	-10,6	-15,6	-21,2	-26,4	-31,2	-36,6	-41,2	-46,2	-50,6	1
36	-5,3	-10,9	-16,0	-21,5	-26,9	-32,2	-37,8	-41,1	-46,5	-49,8	1
37	-4,9	-10,5	-14,3	-19,8	-24,4	-29,1	-34,4	-38,9	-44,4	-48,5	1

Źródło: obliczenia własne.

Ponieważ dla każdego m otrzymaliśmy $k^* = 1$ (tablica 4.6), a więc do obliczenia statystyki M_N będziemy brali pod uwagę wyrazy odpowiadające $k=1$ i reprezentujące wartości statystyk $T(1, m)$ (ostatnia kolumna tablicy 4.3). Wśród wartości $T(1, m)$ poszukujemy teraz wartości największej. Jest nią $T(1, 33)$, a więc statystyka testu JL jest równa $M_N = 1,905$, a odpowiadający jej punkt zmiany $m = 33$ wskazuje na rok 1991. Porównując otrzymaną w tym przykładzie wartość statystyki z wartością krytyczną

testu, równą dla $k = 1$ wartości krytycznej testu rang Wilcozona, stwierdzamy, że jest to statystycznie istotny punkt przełączenia.

Przedstawione w przykładzie 4.5 analizy dotyczyły poszukiwania punktu przełączenia w grupie kobiet w wieku $x = 40$ ukończonych lat. Podobne obliczenia wykonać można dla innych grup wieku.

Wyniki poszukiwania punktów przełączenia, uzyskane dla Polski na podstawie danych z okresu 1958–2000, zawarte zostały w tablicy 6.1 (rozdział 6) i wykorzystane do fazyfikacji macierzy obserwacji, która jest niezbędnym elementem szacowania parametrów modeli umieralności, rozważanych w dalszej części książki. Jednocześnie, ideę punktów przełączenia uwzględniono w ogólnych procedurach estymacji parametrów w tych modelach.

W przypadku prezentowanego modelu typu Koissi–Shapiro rozmywanie macierzy obserwacji polega na wyznaczeniu parametrów rozmytości $e_{x,t}$, tj. na rozwiązaniu zadania optymalizacyjnego (4.4.8)–(4.4.9) dla danej grupy wieku x oraz dla ustalonych lat t objętych badaniem, a następnie na skorzystaniu ze wzoru (4.4.10). Uwzględnienie punktów przełączenia w procedurze fazyfikacji oznaczałoby dodanie modyfikacji, polegającej na rozwiązaniu zadania (4.4.8)–(4.4.9), w podziale na podokresy (tzw. reżimy umieralności) wyznaczone kolejnymi punktami przełączenia.

4.5. Estymacja parametrów modelu Koissi–Shapiro

Do estymacji współczynników występujących w modelu umieralności (4.3.1) typu Koissi–Shapiro, opartym na skierowanych liczbach rozmytych, użyjemy odległości Diamonda pomiędzy lewą i prawą stroną modelu, to jest pomiędzy elementami $\vec{Y}_{x,t}$ macierzy obserwacji i wyrażeniami $\vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t)$. Zadanie polega na minimalizacji sumy odległości Diamonda (definicja 4.8) postaci

$$S = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T D^2(\vec{Y}_{x,t}, \vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t)) = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T d_{x,t}, \quad (4.5.1)$$

gdzie

$$d_{x,t} \equiv D^2(\vec{Y}_{x,t}, \vec{A}_x \oplus \vec{B}_x \otimes \vec{K}_t) = \int_0^1 \left[f_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) - f_{Y_{x,t}}(z) \right]^2 + \left[g_{A_x}(z) + g_{B_x \otimes K_t}(z) - g_{Y_{x,t}}(z) \right]^2 dz. \quad (4.5.2)$$

Funkcje podcałkowe mają postać

$$\begin{aligned}
 & f_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) - f_{Y_{x,t}}(z)^2 = \\
 & = (a_x + b_x k_t - y_{x,t}) - (s_{A_x} + s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t})(1-z) + s_{B_x} s_{K_t} (1-z)^2, \\
 & g_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) - g_{Y_{x,t}}(z)^2 = \\
 & = (a_x + b_x k_t - y_{x,t}) + (s_{A_x} + s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t})(1-z) + s_{B_x} s_{K_t} (1-z)^2.
 \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$U_{x,t} = a_x + b_x k_t - y_{x,t}, \quad V_{x,t} = s_{A_x} + s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t}, \quad W_{x,t} = s_{B_x} s_{K_t}. \quad (4.5.3)$$

Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & f_{A_x}(z) + f_{B_x \otimes K_t}(z) - f_{Y_{x,t}}(z)^2 = U_{x,t} - V_{x,t}(1-z) + W_{x,t}(1-z)^2, \\
 & g_{A_x}(z) + g_{B_x \otimes K_t}(z) - g_{Y_{x,t}}(z)^2 = U_{x,t} + V_{x,t}(1-z) + W_{x,t}(1-z)^2.
 \end{aligned}$$

Sumując stronami, a następnie oznaczając symbolem $\Psi_{x,t}(z)$ uzyskaną sumę, dostajemy

$$\Psi_{x,t}(z) = 2U_{x,t}^2 + 2(2U_{x,t}W_{x,t} + V_{x,t}^2)(1-z)^2 + 2W_{x,t}^2(1-z)^4.$$

Całka z funkcji $\Psi_{x,t}(z)$ na przedziale $[0, 1]$ prowadzi do składnika $d_{x,t}$

$$\begin{aligned}
 d_{x,t} & \equiv D^2(\vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t), \vec{Y}_{x,t}) = \\
 & = 2U_{x,t}^2 + 2(2U_{x,t}W_{x,t} + V_{x,t}^2) \int_0^1 (1-z)^2 dz + 2W_{x,t}^2 \int_0^1 (1-z)^4 dz.
 \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\int_0^1 (1-z)^n dz = \frac{1}{n+1},$$

więc

$$d_{x,t} = 2U_{x,t}^2 + \frac{4}{3}U_{x,t}W_{x,t} + \frac{2}{3}V_{x,t}^2 + \frac{2}{5}W_{x,t}^2. \quad (4.5.4)$$

Ze względu na fakt, że wyrażenie $W_{x,t}$ jest bliskie zeru, przyjmujemy dalej

$$d_{x,t} \approx 2U_{x,t}^2 + \frac{2}{3}V_{x,t}^2. \quad (4.5.5)$$

Zauważmy, że wyrażenie (4.5.5) jest częścią minimalizowanego funkcjonału (4.5.1) i jednocześnie funkcją współczynników $a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$. Funkcjonał, który należy minimalizować, ma bowiem postać sumy

$$F(a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}) = \sum_{t=1}^T \sum_{x=0}^X d_{x,t}. \quad (4.5.6)$$

Przyrównanie do zera pochodnych cząstkowych funkcjonału (4.5.6) względem poszczególnych parametrów prowadzi do następującego układu

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T (a_x + b_x k_t - y_{x,t}) = 0, \\ \sum_{t=1}^T (a_x + b_x k_t - y_{x,t}) k_t + \frac{1}{3} (s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t}) s_{K_t} = 0, \\ \sum_{x=0}^X (a_x + b_x k_t - y_{x,t}) b_x + \frac{1}{3} (s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t}) s_{B_x} = 0, \\ \sum_{t=1}^T (s_{A_x} + s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t}) = 0, \\ \sum_{t=1}^T (s_{A_x} + s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t}) k_t = 0, \\ \sum_{x=0}^X (s_{A_x} + s_{B_x} k_t + s_{K_t} b_x - e_{x,t}) b_x = 0. \end{array} \right. \quad (4.5.7)$$

Aby zagwarantować jednoznaczność rozwiązania, przyjmujemy dodatkowe warunki ograniczające, dotyczące parametrów b_x oraz k_t , analogiczne do warunków zakładanych w standardowym modelu Lee–Cartera, to jest

$$\sum_{x=0}^X b_x = 1, \quad \sum_{t=1}^T k_t = 0. \quad (4.5.8)$$

Zakładamy dodatkowo, że rozpiętości $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ są liczbami nieujemnymi, czyli

$$\forall_x s_{A_x}, s_{B_x} \geq 0, \quad \forall_t s_{K_t} \geq 0. \quad (4.5.9)$$

Rozwiązanie układu (4.5.7), przy ograniczeniach (4.5.8)–(4.5.9), pozwala na wyznaczenie ocen parametrów modelu umieralności (4.3.1).

4.6. Uwagi końcowe

Przedstawione w tym rozdziale rozważania stanowią wprowadzenie do nowych propozycji rozmytych i zespolonych modeli umieralności, omawianych w dalszej części książki.

Rozdział 5

Modele umieralności oparte na zmodyfikowanych liczbach rozmytych i funkcjach zespolonych

5.1. Wprowadzenie

Analiza algebry Banacha OFN (*Oriented Fuzzy Numbers*), zaproponowanej przez Kosińskiego z zespołem, zasugerowała nam przyjęcie algebry zmodyfikowanych liczb rozmytych, którą nazwaliśmy algebrą MFN (*Modified Fuzzy Numbers*). Zasadnicza różnica pomiędzy OFN i MFN polega na innej definicji mnożenia jako działania w algebrze abstrakcyjnej. Dalsze rozważania zostały przeniesione na grunt teorii funkcji zespolonych.

5.2. Model umieralności oparty na algebrze zmodyfikowanych liczb rozmytych

Rozważmy model umieralności oparty na liczbach MFN postaci

$$\check{Y}_{x,t} = \check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t), \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (5.2.1)$$

gdzie zmodyfikowane liczby rozmyte $\check{Y}_{x,t}$ reprezentują logarytmy cząstkowych współczynników zgonów, $\check{A}_x, \check{B}_x, \check{K}_t$ są parametrami modelu, będącymi także zmodyfikowanymi liczbami rozmytymi, natomiast $\oplus, \odot$ reprezentują operatory dodawania i mnożenia liczb MFN (por. definicja B.1, dodatek B).

Przez analogię do skierowanych liczb rozmytych, stosować będziemy następujące oznaczenie dla $\check{A}_x, \check{B}_x$ i $\check{K}_t$

$$\check{A}_x = (f_{A_x}, g_{A_x}), \check{B}_x = (f_{B_x}, g_{B_x}), \check{K}_t = (f_{K_t}, g_{K_t}).$$

Jednocześnie założymy, że liczby rozmyte MFN są generowane przez symetryczne liczby trójkątne, o wartościach centralnych odpowiednio a_x, b_x, k_t i rozpiętościach odpowiednio $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$.

Oznacza to, że funkcje $f_{A_x}, g_{A_x}, f_{B_x}, g_{B_x}, f_{K_t}, g_{K_t}$ są określone wzorami

$$\begin{aligned} f_{A_x}(u) &= a_x - s_{A_x}(1-u), & g_{A_x}(u) &= a_x + s_{A_x}(1-u), \\ f_{B_x}(u) &= b_x - s_{B_x}(1-u), & g_{B_x}(u) &= b_x + s_{B_x}(1-u), \\ f_{K_t}(u) &= k_t - s_{K_t}(1-u), & g_{K_t}(u) &= k_t + s_{K_t}(1-u), \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

dla $u \in [0, 1]$.

Przyjmujemy dalej założenie, że macierz obserwacji jest macierzą o elementach będących liczbami zmodyfikowanymi $\check{Y}_{x,t} = (f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}})$, generowanymi przez trójkątne, symetryczne liczby rozmyte o wartościach centralnych $y_{x,t}$ i rozpiętościach $e_{x,t}$. Funkcje $f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}$ będą zatem postaci

$$\begin{aligned} f_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} - e_{x,t}(1-u), \\ g_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} + e_{x,t}(1-u), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

gdzie $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$, natomiast $e_{x,t}$ są parametrami, wyznaczanymi metodą fazyfikacji, opisaną w dalszej części niniejszego paragrafu.

Stosując definicję mnożenia, a następnie dodawania zmodyfikowanych liczb rozmytych (definicja B.1, dodatek B), otrzymujemy dla $u \in [0, 1]$

$$\check{B}_x \odot \check{K}_t = (f_{B_x \odot K_t}, g_{B_x \odot K_t}), \quad (5.2.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_{B_x \odot K_t}(u) &= b_x k_t + s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2, \\ g_{B_x \odot K_t}(u) &= b_x k_t - s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

oraz

$$\begin{aligned} \check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t) &= (f_{A_x}, g_{A_x}) + (f_{B_x \odot K_t}, g_{B_x \odot K_t}) = \\ &= (f_{A_x} + f_{B_x \odot K_t}, g_{A_x} + g_{B_x \odot K_t}), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_{A_x}(u) + f_{B_x \odot K_t}(u) &= a_x + b_x k_t - s_{A_x}(1-u) + s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2, \\ g_{A_x}(u) + g_{B_x \odot K_t}(u) &= a_x + b_x k_t + s_{A_x}(1-u) - s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Przez model umieralności MFMM (*Modified Fuzzy Mortality Model*) rozumieć będziemy model postaci

$$\check{Y}_{x,t} = \check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t), \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (5.2.8)$$

gdzie

$$\check{Y}_{x,t} = (f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}), \quad \check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t) = (f_{A_x \oplus B_x \odot K_t}, g_{A_x \oplus B_x \odot K_t}) \quad (5.2.9)$$

$$f_{Y_{x,t}}(u) = y_{x,t} - e_{x,t}(1-u), \quad g_{Y_{x,t}}(u) = y_{x,t} + e_{x,t}(1-u), \quad (5.2.10)$$

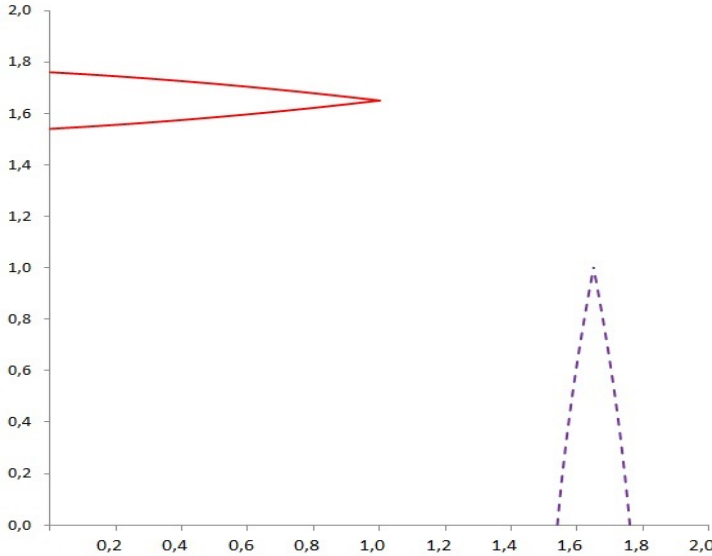
oraz

$$\begin{aligned} f_{A_x \oplus B_x \odot K_t}(u) &= a_x + b_x k_t - s_{A_x}(1-u) - s_{B_x} s_{K_t}(1-u)^2, \\ g_{A_x \oplus B_x \odot K_t}(u) &= a_x + b_x k_t + s_{A_x}(1-u) - s_{B_x} s_{K_t}(1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Przy założeniu, że $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t} \geq 0$ i $s_{A_x} - 2s_{B_x} s_{K_t} \geq 0$, wyrażenie $\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t)$ koresponduje z liczbą rozmytą, z funkcją przynależności zbliżoną do funkcji przynależności symetrycznej liczby trójkątnej z wartością centralną $a_x + b_x k_t$ i rozpiętością równą

$$e_{x,t} = s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}. \quad (5.2.12)$$

Przykład 5.1. Przyjmijmy następujące, przykładowe wartości dla parametrów modelu(5.2.8)–(5.2.11): $a_x = 3$, $b_x = 0,05$, $k_t = -27$, $s_{A_x} = 0,15$, $s_{B_x} = 0,01$, $s_{K_t} = 4$. Rysunek 5.1 ilustruje zmodyfikowaną liczbę rozmytą $\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t)$ i korespondującą z nią symetryczną liczbę rozmytą, zbliżoną do liczby trójkątnej z wartością centralną 1,65 i rozpiętością (u podstawy) 0,11.



Rys. 5.1. Przykład liczby rozmytej $\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t)$ (linia ciągła) i korespondującej symetrycznej liczby rozmytej (linia przerywana)

Źródło: opracowanie własne

5.2.1. Estymacja parametrów modelu

Do estymacji parametrów modelu (5.2.8)–(5.2.11) występujących w definicji zmodyfikowanych liczb rozmytych $\check{A}_x, \check{B}_x, \check{K}_t$ użyjemy odległości Diamonda pomiędzy $\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t)$ oraz $\check{Y}_{x,t}$. Zajmiemy się w pierwszej kolejności zagadnieniem estymacji parametrów a_x, b_x, k_t .

Zadanie polegać będzie na minimalizacji sumy postaci

$$I = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T D^2(\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t), \check{Y}_{x,t}), \quad (5.2.13)$$

która sprowadza się do wzoru

$$I = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T \int_0^1 (f_{A_x}(u) + f_{B_x \odot K_t}(u) - f_{Y_{x,t}}(u))^2 + (g_{A_x}(u) + g_{B_x \odot K_t}(u) - g_{Y_{x,t}}(u))^2 du.$$

W tym celu przekształcimy w pierwszej kolejności funkcje podcałkowe, zaczynając od wyrażeń

$$f_{A_x}(u) + f_{B_x \odot K_t}(u) - f_{Y_{x,t}}(u), \quad g_{A_x}(u) + g_{B_x \odot K_t}(u) - g_{Y_{x,t}}(u). \quad (5.2.14)$$

Mamy

$$\begin{aligned} & f_{A_x}(u) + f_{B_x \odot K_t}(u) - f_{Y_{x,t}}(u) = \\ & = a_x + k_t b_x - y_{x,t} - (s_{A_x} - e_{x,t})(1-u) + s_{B_x} s_{K_t}(1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} & g_{A_x}(u) + g_{B_x \odot K_t}(u) - g_{Y_{x,t}}(u) = \\ & = a_x + k_t b_x - y_{x,t} + (s_{A_x} - e_{x,t})(1-u) - s_{B_x} s_{K_t}(1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Oznaczmy

$$R_{x,t} = a_x + k_t b_x - y_{x,t}, \quad S_{x,t} = s_{A_x} - e_{x,t}, \quad U_{x,t} = s_{B_x} s_{K_t}. \quad (5.2.17)$$

Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} f_{A_x}(u) + f_{B_x \odot K_t}(u) - f_{Y_{x,t}}(u) &= R_{x,t} - S_{x,t}(1-u) + U_{x,t}(1-u)^2, \\ g_{A_x}(u) + g_{B_x \odot K_t}(u) - g_{Y_{x,t}}(u) &= R_{x,t} + S_{x,t}(1-u) - U_{x,t}(1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Podnosząc do kwadratu obustronnie równości (5.2.18), a następnie oznaczając symbolami $\Phi_{x,t}$ oraz $\Psi_{x,t}(z)$ uzyskane kwadraty sum, dostajemy

$$\Phi_{x,t}(u) = R_{x,t}^2 - 2R_{x,t} S_{x,t}(1-u) - U_{x,t}(1-u)^2 + S_{x,t}(1-u) - U_{x,t}(1-u)^2,$$

$$\Psi_{x,t}(u) = R_{x,t}^2 + 2R_{x,t} S_{x,t}(1-u) - U_{x,t}(1-u)^2 + S_{x,t}(1-u) - U_{x,t}(1-u)^2.$$

Całka z sumy $\Phi_{x,t}(u) + \Psi_{x,t}(u)$, względem zmiennej całkowania u , na przedziale $[0, 1]$, prowadzi do odległości Diamonda, która stanowi składową naszego kryterium optymalizacyjnego i ma postać

$$\begin{aligned} d_{x,t} &\equiv D^2(\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t, \check{Y}_{x,t})) = \\ &= 2R_{x,t}^2 + 2S_{x,t}^2 \int_0^1 (1-u)^2 du - 4S_{x,t}U_{x,t} \int_0^1 (1-u)^3 du + 2U_{x,t}^2 \int_0^1 (1-u)^4 du. \end{aligned}$$

Skorzystamy następnie z ogólnego wzoru

$$\int_0^1 (1-u)^n du = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}.$$

Dzięki temu uzyskujemy

$$d_{x,t} \equiv D^2(\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t, \check{Y}_{x,t})) = 2R_{x,t}^2 + \frac{2}{3}S_{x,t}^2 - S_{x,t}U_{x,t} + \frac{2}{5}U_{x,t}^2.$$

Zastępując $R_{x,t}, S_{x,t}, U_{x,t}$ oryginalnymi wyrażeniami (5.2.17), mamy

$$d_{x,t} = 2(a_x + k_t b_x - y_{x,t})^2 + \frac{2}{3}(s_{A_x} - e_{x,t})^2 - s_{B_x} s_{K_t} (s_{A_x} - e_{x,t}) + \frac{2}{5}s_{B_x}^2 s_{K_t}^2.$$

Zauważmy, że $d_{x,t}$ jest częścią minimalizowanej sumy (5.2.13) i jednocześnie funkcją współczynników $a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$, przy czym współczynniki a_x, b_x, k_t nie zależą od $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ i mogą być estymowane oddzielnie.

Funkcjonał, który będziemy minimalizować ze względu na a_x, b_x, k_t , redukuje się do podwójnej sumy

$$F(a_x, b_x, k_t) = 2 \sum_{t=1}^T \sum_{x=0}^X (a_x + k_t b_x - y_{x,t})^2, \quad (5.2.19)$$

gdzie $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$. Wypiszmy pochodne cząstkowe funkcji $d_{x,t}$ względem parametrów a_x, b_x, k_t

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d_{x,t}}{\partial a_x} = 4(a_x + k_t b_x - y_{x,t}), \\ \frac{\partial d_{x,t}}{\partial b_x} = 4k_t(a_x + k_t b_x - y_{x,t}), \\ \frac{\partial d_{x,t}}{\partial k_t} = 4b_x(a_x + k_t b_x - y_{x,t}), \end{array} \right. \quad (5.2.20)$$

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T (a_x + k_t b_x - y_{x,t}) = 0, \quad x = 0, 1, \dots, X, \\ \sum_{t=1}^T k_t (a_x + k_t b_x - y_{x,t}) = 0, \quad x = 0, 1, \dots, X, \\ \sum_{x=0}^X b_x (a_x + k_t b_x - y_{x,t}) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \end{array} \right. \quad (5.2.21)$$

Zakładamy, podobnie jak w modelu Lee–Cartera

$$\sum_{t=1}^T k_t = 0, \quad \sum_{x=0}^X b_x = 1. \quad (5.2.22)$$

Z pierwszego równania w układzie równań (5.2.21) otrzymujemy

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{x,t}, \quad x = 0, 1, \dots, X. \quad (5.2.23)$$

Z (5.2.23) wynika, że parametry a_x reprezentują średni poziom umieralności w grupach wieku x na przestrzeni lat objętych analizą. Ponadto

$$b_x = \frac{\sum_{t=1}^T y_{x,t} k_t}{\sum_{t=1}^T k_t^2}, \quad x = 0, 1, \dots, X \quad (5.2.24)$$

oraz

$$k_t = \frac{\sum_{x=0}^X y_{x,t} b_x - \sum_{x=0}^X a_x b_x}{\sum_{x=0}^X b_x^2} \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.2.25)$$

W celu wyznaczenia b_x, k_t związanych zależnościami (5.2.24)–(5.2.25) przy warunkach (5.2.22) skorzystać można z wybranego algorytmu optymalizacji nieliniowej, minimalizującego sumę (5.2.19). Może to być np. jeden ze znanych algorytmów gradientowych dostępnych w pakiecie Matlab lub Excel Solver.

Aby oszacować pozostałe parametry modelu, tj. $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ skorzystamy z (5.2.12), czyli

$$e_{x,t} = s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}, \quad x = 0, 1, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.2.26)$$

Z założenia rozmytości $e_{x,t}$ są liczbami nieujemnymi. Najmniejszą wartością, jaką mogą przyjąć jest 0. Oszacowania parametrów $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$

znajdziemy w taki sposób, aby dla każdego x suma $\sum_{t=1}^T e_{x,t}$ osiągnęła minimum warunkowe, tj. aby suma

$$\sum_{t=1}^T e_{x,t} = T s_{A_x} - s_{B_x} \sum_{t=1}^T s_{K_t}, \quad (5.2.27)$$

osiągnęła wartość najmniejszą, przy warunkach ograniczających

$$\begin{aligned} \forall_x \forall_t \ s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t} \geq 0, \ s_{A_x} - 2s_{B_x} s_{K_t} \geq 0, \ \sum_{t=1}^T s_{K_t} = C, \\ a_x + b_x k_t + (s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}) \geq \ln m_{x,t}, \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

$$a_x + b_x k_t - (s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}) \leq \ln m_{x,t},$$

gdzie a_x, b_x, k_t są parametrami modelu oszacowanymi na podstawie zależności (5.2.23)–(5.2.25), natomiast C jest zadaną stałą. Zakładamy przy tym, że zachodzi związek $s_{K_t} = \alpha t$, gdzie α jest pewną stałą.

Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego (5.2.27)–(5.2.28) pozwala na oszacowanie parametrów $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$, a pośrednio także na wyznaczenie parametrów rozmytości $e_{x,t}$, na podstawie relacji (5.2.26).

5.3. Model umieralności oparty na funkcjach zespolonych

Punktem wyjścia w dalszej części tego rozdziału będzie reprezentacja skierowanych liczb rozmytych OFN za pomocą funkcji zespolonych.

Rozważmy zmienną rozmytą triangularną i symetryczną z wartością centralną a i rozpiętością s_A . Zgodnie z propozycją W. Kosińskiego, możemy ją przedstawić jako skierowaną liczbę rozmytą $\vec{A} = (f_A, g_A)$, gdzie

$$f_A(u) = a - s_A(1 - u), \quad g_A(u) = a + s_A(1 - u), \quad u \in [0, 1]. \quad (5.3.1)$$

Bardzo łatwo możemy utworzyć algebrę zespoloną z algebry OFN, przyjmując dla $\vec{A} = (f_A, g_A)$ zespoloną postać

$$A(u) = f_A(u) + i g_A(u), \quad u \in [0, 1], \quad (5.3.2)$$

w skrócie

$$A = f_A + i g_A, \quad (5.3.3)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną.

Aby móc skorzystać z twierdzenia Gelfanda–Mazura, gwarantującego izomorfizm izometryczny, sięgnęliśmy po algebrę liczb zespolonych $C(\mathcal{T})$ (zob. dodatek B), gdzie $\mathcal{T}$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa. Taką przestrzenią może być odcinek domknięty $[0, 1]$ lub iloczyn kartezjański takich odcinków. Przyjmując operację mnożenia właściwą dla liczb zespolonych, skierowane liczby rozmyte będziemy teraz identyfikować z funkcjami zespolonymi określonymi na odcinku $[0, 1]$.

W algebrze OFN obserwacje i parametry modelu $\vec{Y}_{x,t} = \vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{K}_t)$ wyrażone są za pomocą skierowanych liczb rozmytych $\vec{Y}_{x,t} = (f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}})$, $\vec{A}_x = (f_{A_x}, g_{A_x})$, $\vec{B}_x = (f_{B_x}, g_{B_x})$, $\vec{K}_t = (f_{K_t}, g_{K_t})$ (por. rozdział 4), będących odpowiednikami symetrycznych, trójkątnych liczb rozmytych o wartościach centralnych odpowiednio $y_{x,t}$, a_x , b_x , k_t i rozpiętościach odpowiednio $e_{x,t}$, s_{A_x} , s_{B_x} , s_{K_t} . Z tego powodu funkcje definiujące poszczególne liczby skierowane mają postać

$$\begin{aligned} f_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} - e_{x,t}(1-u), & g_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} + e_{x,t}(1-u), \\ f_{A_x}(u) &= a_x - s_{A_x}(1-u), & g_{A_x}(u) &= a_x + s_{A_x}(1-u), \\ f_{B_x}(u) &= b_x - s_{B_x}(1-u), & g_{B_x}(u) &= b_x + s_{B_x}(1-u), \\ f_{K_t}(u) &= k_t - s_{K_t}(1-u), & g_{K_t}(u) &= k_t + s_{K_t}(1-u), \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

gdzie $u \in [0, 1]$ oraz $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$.

Zakładamy, że wartości $y_{x,t}$ są znane, natomiast parametry rozmytości $e_{x,t}$ wyznaczamy metodą fazyfikacji obserwacji Koissi–Shapiro. Nieznanymi parametrami modelu są współczynniki a_x , b_x , k_t , s_{A_x} , s_{B_x} , s_{K_t} .

Rozważania w tym paragrafie poświęcone są propozycji modyfikacji rozmytego modelu umieralności, poprzez zastąpienie skierowanych liczb rozmytych funkcjami zespolonymi.

Proponujemy zatem model umieralności CFMM (*Complex-Function Mortality Model*) postaci

$$Y_{x,t}(u) = A_x(u) + B_x(u)K_t(u), \quad u \in [0, 1], \quad (5.3.5)$$

gdzie $Y_{x,t}(u)$, $A_x(u)$, $B_x(u)$, $K_t(u)$ są funkcjami zespolonymi postaci

$$\begin{aligned} Y_{x,t}(u) &= f_{Y_{x,t}}(u) + ig_{Y_{x,t}}(u), \\ A_x(u) &= f_{A_x}(u) + ig_{A_x}(u), \\ B_x(u) &= f_{B_x}(u) + ig_{B_x}(u), \\ K_t(u) &= f_{K_t}(u) + ig_{K_t}(u), \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

przy czym wyrażenia po prawej stronie (5.3.6) mają postać (5.3.4).

Iloczyn $B_x(u)K_t(u)$, występujący po prawej stronie (5.3.5), uwzględnia regułę mnożenia na liczbach zespolonych

$$\begin{aligned} B_x(u)K_t(u) &= (f_{B_x}(u) + ig_{B_x}(u))(f_{K_t}(u) + ig_{K_t}(u)) = \\ &= [f_{B_x}(u)f_{K_t}(u) - g_{B_x}(u)g_{K_t}(u)] + i[f_{B_x}(u)g_{K_t}(u) + g_{B_x}(u)f_{K_t}(u)]. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

W celu wyznaczenia $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$, znajdziemy najpierw składniki w nawiasach kwadratowych po prawej stronie (5.3.7). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_{B_x}(u)f_{K_t}(u) &= b_x k_t + s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2 - (b_x s_{K_t} + k_t s_{B_x}) (1-u), \\ g_{B_x}(u)g_{K_t}(u) &= b_x k_t + s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2 + (b_x s_{K_t} + k_t s_{B_x}) (1-u). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Po odjęciu stronami dostajemy pierwszy składnik części rzeczywistej wyrażenia $B_x(u)K_t(u)$

$$f_{B_x}(u)f_{K_t}(u) - g_{B_x}(u)g_{K_t}(u) = -(2b_x s_{K_t} + 2k_t s_{B_x}) (1-u). \quad (5.3.9)$$

Z kolei, pierwszy składnik części rzeczywistej funkcji zespolonej $A_x(u)$ ma postać

$$f_{A_x}(u) = a_x - s_{A_x} (1-u), \quad (5.3.10)$$

zatem część rzeczywista funkcji zespolonej $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$ określona jest wzorem

$$\begin{aligned} f_{A_x+B_xK_t}(u) &= f_{A_x}(u) + [f_{B_x}(u)f_{K_t}(u) - g_{B_x}(u)g_{K_t}(u)] = \\ &= a_x - (s_{A_x} + 2b_x s_{K_t} + 2k_t s_{B_x}) (1-u). \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

W podobny sposób obliczymy część urojoną dla $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$. W tym celu w pierwszej kolejności znajdziemy część urojoną wyrażenia po prawej stronie (5.3.7), czyli

$$g_{B_x}(u)f_{K_t}(u) + f_{B_x}(u)g_{K_t}(u). \quad (5.3.12)$$

Mamy

$$\begin{aligned} g_{B_x}(u)f_{K_t}(u) &= b_x k_t - s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2 - (b_x s_{K_t} - k_t s_{B_x}) (1-u), \\ f_{B_x}(u)g_{K_t}(u) &= b_x k_t - s_{B_x} s_{K_t} (1-u)^2 + (b_x s_{K_t} - k_t s_{B_x}) (1-u). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$g_{B_x}(u)f_{K_t}(u) + f_{B_x}(u)g_{K_t}(u) = 2b_x k_t - 2s_{B_x}s_{K_t}(1-u)^2. \quad (5.3.14)$$

Dodając wyrażenie na $g_{A_x}(u)$, czyli

$$g_{A_x}(u) = a_x + s_{A_x}(1-u), \quad (5.3.15)$$

otrzymamy postać części urojonej funkcji zespolonej $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$

$$\begin{aligned} g_{A_x+B_xK_t}(u) &= g_{A_x}(u) + [g_{B_x}(u)f_{K_t}(u) + f_{B_x}(u)g_{K_t}(u)] = \\ &= a_x + 2b_x k_t + s_{A_x}(1-u) - 2s_{B_x}s_{K_t}(1-u)^2. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Wzór (5.3.11) daje nam zatem wyrażenie na część rzeczywistą funkcji zespolonej $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$, a wzór (5.3.16) wyraża postać jej części urojonej.

5.3.1. Estymacja parametrów modelu

Zauważymy, że funkcje $Y_{x,t}(u)$ oraz $A_x(u), B_x(u), K_t(u)$ możemy traktować jako elementy przestrzeni funkcji zespolonych, całkowalnych z kwadratem modułu na odcinku $[0, 1]$. W zagadnieniu estymacji parametrów modelu (5.3.5)–(5.3.6) interesuje nas minimalizacja odległości pomiędzy $Y_{x,t}(u)$ oraz $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$. Do tego celu wykorzystamy metrykę L_2 postaci

$$\|(A_x + B_x K_t) - Y_{x,t}\|_{L_2} = \int_0^1 |(A_x(u) + B_x(u)K_t(u) - Y_{x,t}(u))|^2 du, \quad (5.3.17)$$

gdzie $|z|^2$ oznacza kwadrat modułu liczby zespolonej z , czyli sumę kwadratów części rzeczywistej i części urojonej liczby z .

Sumę odległości między wyrażeniami $Y_{x,t}(u)$ oraz $A_x(u) + B_x(u)K_t(u)$ dla $x = 0, 1, \dots, X, t = 1, 2, \dots, T$ traktować będziemy jako funkcję celu, której minimalizacja pozwoli na wyznaczenie nieznanych parametrów modelu. Funkcja celu ma postać

$$\begin{aligned} F(a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}) &= \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T \|(A_x + B_x K_t) - Y_{x,t}\|_{L_2} = \\ &= \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T \int_0^1 |(A_x(u) + B_x(u)K_t(u) - Y_{x,t}(u))|^2 du. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Część rzeczywista wyrażenia $A_x(u) + B_x(u)K_t(u) - Y_{x,t}(u)$ jest następująca

$$\begin{aligned}
 & f_{A_x}(u) + f_{B_x}(u)f_{K_t}(u) - f_{Y_{x,t}}(u) = \\
 & = f_{A_x}(u) + [f_{B_x K_t}(u) - g_{B_x}(u)g_{K_t}(u)] - f_{Y_{x,t}}(u) = \\
 & = (a_x - y_{x,t}) - (s_{A_x} + 2k_t s_{B_x} + 2b_x s_{K_t} - e_{x,t})(1 - u).
 \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Analogicznie, część urojona dla $A_x(u) + B_x(u)K_t(u) - Y_{x,t}(u)$ ma postać

$$\begin{aligned}
 & g_{A_x}(u) + g_{B_x K_t}(u) - g_{Y_{x,t}}(u) = \\
 & = g_{A_x}(u) + [g_{B_x}(u)f_{K_t}(u) + f_{B_x}(u)g_{K_t}(u)] - g_{Y_{x,t}}(u) = \\
 & = (a_x - y_{x,t} + 2b_x k_t) + (s_{A_x} - e_{x,t})(1 - u) - 2s_{B_x} s_{K_t} (1 - u)^2.
 \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Obliczenie wartości odległości (5.3.17) wymaga obliczenia kwadratów wyrażeń występujących po prawej stronie (5.3.19), (5.3.20), a następnie wyznaczenia całki z ich sumy. W efekcie prowadzi to do funkcji celu (5.3.18), którą minimalizujemy względem nieznanych parametrów $a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$.

W kolejnym paragrafie proponujemy dalej idącą modyfikację zespolonego modelu umieralności. Propozycję przedstawioną w niniejszym paragrafie traktujemy jako etap przejścia od modelu umieralności opartego na algebrze skierowanych liczb rozmytych OFN (por. rozdział 4), poprzez model umieralności oparty na zmodyfikowanych liczbach rozmytych MFN, do modelu zdefiniowanego w algebrze kwaternionów, o którym mowa w dalszej części tego rozdziału.

5.4. Kwaternionowy model umieralności

Pojęcie kwaternionów zostało po raz pierwszy opisane w roku 1843 przez matematyka irlandzkiego Williama Hamiltona i stanowiło uogólnienie pojęcia algebry zespolonej. Przestrzeń kwaternionów oznaczana jest symbolem $\mathbb{H}$, na cześć twórcy teorii kwaternionów. Podstawowe pojęcia i elementy algebry kwaternionów zostały zamieszczone w dodatku B.

Postulujemy kwaternionowy model umieralności, oznaczony dalej symbolem CNMM (*Complex-Number Mortality Model*)

$$\tilde{Y}_{x,t} = \tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t, \quad (5.4.1)$$

gdzie $\tilde{Y}_{x,t}, \tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{K}_t$ są parami funkcji zespolonych

$$\tilde{Y}_{x,t} = (f_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}), \quad \tilde{A}_x = (f_{A_x}, g_{A_x}), \quad (5.4.2)$$

$$\tilde{B}_x = (f_{B_x}, g_{B_x}), \quad \tilde{K}_t = (f_{K_t}, g_{K_t}).$$

Uporządkowane pary funkcji zespolonych (5.4.2) nazywamy kwaternionami (definicja B.6, dodatek B). Przy symbolice analogicznej do stosowanej w algebrze OFN, poszczególne funkcje dla $u \in [0, 1]$ są postaci

$$\begin{aligned} f_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} - i(1-u)e_{x,t}, & g_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} + i(1-u)e_{x,t}, \\ f_{A_x}(u) &= a_x - i(1-u)s_{A_x}, & g_{A_x}(u) &= a_x + i(1-u)s_{A_x}, \\ f_{B_x}(u) &= b_x - i(1-u)s_{B_x}, & g_{B_x}(u) &= b_x + i(1-u)s_{B_x}, \\ f_{K_t}(u) &= k_t - i(1-u)s_{K_t}, & g_{K_t}(u) &= k_t + i(1-u)s_{K_t}. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Zakładamy, że wielkości $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$ są znane, natomiast $e_{x,t}$ oraz $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ są wyznaczone metodą fazyfikacji macierzy obserwacji. Nieznanymi parametrami modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) są współczynniki a_x, b_x, k_t .

Przypatrując się wyrażeniom w (5.4.3), zauważymy, że funkcje $f_{Y_{x,t}}, f_{A_x}, f_{B_x}, f_{K_t}$ równe są funkcjom sprzężonym $\bar{g}_{Y_{x,t}}, \bar{g}_{A_x}, \bar{g}_{B_x}, \bar{g}_{K_t}$ postaci

$$\begin{aligned} \bar{g}_{Y_{x,t}}(u) &= y_{x,t} - i(1-u)e_{x,t}, \\ \bar{g}_{A_x}(u) &= a_x - i(1-u)s_{A_x}, \\ \bar{g}_{B_x}(u) &= b_x - i(1-u)s_{B_x}, \\ \bar{g}_{K_t}(u) &= k_t - i(1-u)s_{K_t}, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

a tym samym mamy

$$\tilde{Y}_{x,t} = (\bar{g}_{Y_{x,t}}, g_{Y_{x,t}}), \quad \tilde{A}_x = (\bar{g}_{A_x}, g_{A_x}), \quad (5.4.5)$$

$$\tilde{B}_x = (\bar{g}_{B_x}, g_{B_x}), \quad \tilde{K}_t = (\bar{g}_{K_t}, g_{K_t}).$$

W zapisie macierzowym $\tilde{A}_x$ ma postać

$$\tilde{A}_x(u) = \begin{pmatrix} \bar{g}_{A_x}(u) & g_{A_x}(u) \\ -\bar{g}_{A_x}(u) & g_{A_x}(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 1]. \quad (5.4.6)$$

Analogicznie

$$\tilde{B}_x(u) = \begin{pmatrix} \bar{g}_{B_x}(u) & g_{B_x}(u) \\ -\bar{g}_{B_x}(u) & g_{B_x}(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 1] \quad (5.4.7)$$

oraz

$$\tilde{K}_t(u) = \begin{pmatrix} \bar{g}_{K_t}(u) & g_{K_t}(u) \\ -\bar{g}_{K_t}(u) & g_{K_t}(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 1]. \quad (5.4.8)$$

Przekształcając macierze zespolone kwaternionów $\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{K}_t$, mamy

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(u) &= \begin{pmatrix} \bar{g}_{A_x}(u) & g_{A_x}(u) \\ -\bar{g}_{A_x}(u) & g_{A_x}(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_x - is_{A_x}(1-u) & a_x + is_{A_x}(1-u) \\ -a_x + is_{A_x}(1-u) & a_x + is_{A_x}(1-u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_x & a_x \\ -a_x & a_x \end{pmatrix} + i(1-u) \begin{pmatrix} -s_{A_x} & s_{A_x} \\ s_{A_x} & s_{A_x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} \tilde{B}_x(u) &= \begin{pmatrix} \bar{g}_{B_x}(u) & g_{B_x}(u) \\ -\bar{g}_{B_x}(u) & g_{B_x}(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_x - is_{B_x}(1-u) & b_x + is_{B_x}(1-u) \\ -b_x + is_{B_x}(1-u) & b_x + is_{B_x}(1-u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_x & b_x \\ -b_x & b_x \end{pmatrix} + i(1-u) \begin{pmatrix} -s_{B_x} & s_{B_x} \\ s_{B_x} & s_{B_x} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t(u) &= \begin{pmatrix} \bar{g}_{K_t}(u) & g_{K_t}(u) \\ -\bar{g}_{K_t}(u) & g_{K_t}(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} k_t - is_{K_t}(1-u) & k_t + is_{K_t}(1-u) \\ -k_t + is_{K_t}(1-u) & k_t + is_{K_t}(1-u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} k_t & k_t \\ -k_t & k_t \end{pmatrix} + i(1-u) \begin{pmatrix} -s_{K_t} & s_{K_t} \\ s_{K_t} & s_{K_t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Stosując regułę mnożenia kwaternionów, dostajemy

$$\begin{aligned} \tilde{B}_x(u)\tilde{K}_t(u) = & \begin{pmatrix} b_x & b_x & k_t & k_t \\ -b_x & b_x & -k_t & k_t \end{pmatrix} - (1-u)^2 \begin{pmatrix} -s_{B_x} & s_{B_x} & -s_{K_t} & s_{K_t} \\ s_{B_x} & s_{B_x} & s_{K_t} & s_{K_t} \end{pmatrix} + \\ & + i(1-u) \begin{pmatrix} b_x & b_x & -s_{K_t} & s_{K_t} \\ -b_x & b_x & s_{K_t} & s_{K_t} \end{pmatrix} + (1-u) \begin{pmatrix} -s_{B_x} & s_{B_x} & k_t & k_t \\ s_{B_x} & s_{B_x} & -k_t & k_t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Operacja mnożenia na poszczególnych macierzach prowadzi do następujących wzorów

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_x & b_x & k_t & k_t \\ -b_x & b_x & -k_t & k_t \end{pmatrix} &= b_x k_t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2b_x k_t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -s_{B_x} & s_{B_x} & -s_{K_t} & s_{K_t} \\ s_{B_x} & s_{B_x} & s_{K_t} & s_{K_t} \end{pmatrix} &= s_{B_x} s_{K_t} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2s_{B_x} s_{K_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{pmatrix} b_x & b_x & -s_{K_t} & s_{K_t} \\ -b_x & b_x & s_{K_t} & s_{K_t} \end{pmatrix} = b_x s_{K_t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2b_x s_{K_t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i analogicznie

$$\begin{pmatrix} -s_{B_x} & s_{B_x} & k_t & k_t \\ s_{B_x} & s_{B_x} & -k_t & k_t \end{pmatrix} = s_{B_x} k_t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2s_{B_x} k_t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem mamy

$$\begin{aligned} \tilde{B}_x(u)\tilde{K}_t(u) &= 2b_x k_t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2(1-u)^2 s_{B_x} s_{K_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ 2i(1-u) b_x s_{K_t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_t s_{B_x} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Kwaternion $\tilde{A}_x(u)$ ma postać

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(u) &= \begin{pmatrix} a_x - i s_{A_x}(1-u) & a_x + i s_{A_x}(1-u) \\ -a_x + i s_{A_x}(1-u) & a_x + i s_{A_x}(1-u) \end{pmatrix} = \\ &= a_x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + i(1-u) s_{A_x} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Po dodaniu kwaternionu $\tilde{A}_x(u)$ do $\tilde{B}_x(u)\tilde{K}_t(u)$, otrzymujemy inną postać prawej strony modelu kwaternionowego

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_x(u) + \tilde{B}_x(u)\tilde{K}_t(u) = \\ & = a_x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2b_x k_t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2(1-u)^2 s_{B_x} s_{K_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + i(1-u) s_{A_x} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2b_x s_{K_t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2k_t s_{B_x} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Przekształcenie macierzy obserwacji do postaci kwaternionu $\tilde{Y}_{x,t}$ polegać będzie na zapisie macierzowym

$$\tilde{Y}_{x,t}(u) = \begin{pmatrix} \bar{g}_{Y_{x,t}}(u) & g_{Y_{x,t}}(u) \\ -\bar{g}_{Y_{x,t}}(u) & g_{Y_{x,t}}(u) \end{pmatrix}, \quad (5.4.15)$$

$$g_{Y_{x,t}}(u) = y_{x,t} + ie_{x,t}(1-u), \quad \bar{g}_{Y_{x,t}}(u) = y_{x,t} - ie_{x,t}(1-u). \quad (5.4.16)$$

Równoważny zapis przyjmuje postać

$$\tilde{Y}_{x,t}(u) = \begin{pmatrix} y_{x,t} - ie_{x,t}(1-u) & y_{x,t} + ie_{x,t}(1-u) \\ -y_{x,t} + ie_{x,t}(1-u) & y_{x,t} + ie_{x,t}(1-u) \end{pmatrix}. \quad (5.4.17)$$

5.4.1. Estymacja parametrów modelu

Wyrażenie (5.4.14) wykorzystamy do estymacji parametrów modelu. W tym celu w przestrzeni kwaternionów $\mathbb{H}$ wprowadźmy normę

$$\|F\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^1 \|F(u)\|_{\mathbb{H}}^2 du, \quad (5.4.18)$$

gdzie $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}^2$ pod całką oznacza kwadrat normy elementu w $\mathbb{H}$ (definicja B.10, dodatek B).

Do estymacji użyjemy metody minimalizacji funkcjonału

$$F(a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}) = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T \|\tilde{Y}_{x,t} - \tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t\|_{\mathcal{L}_2}^2. \quad (5.4.19)$$

Aby wyznaczyć normę kwaternionu w przestrzeni $\mathbb{H}$, wystarczą wyrazy z pierwszego wiersza macierzy zespolonej w zapisie macierzowym danego kwaternionu.

W przypadku kwaternionu $\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t$ funkcje zespolone $f_{A_x+B_x K_t}(u)$ oraz $g_{A_x+B_x K_t}(u)$ definiujące kwaternion wyrażają się wzorami

$$f_{A_x+B_x K_t}(u) = a_x - 2(1-u)^2 s_{B_x} s_{K_t} - i(1-u)(s_{A_x} + 2k_t s_{B_x}), \quad (5.4.20)$$

$$g_{A_x+B_x K_t}(u) = a_x + 2b_x k_t + i(1-u)(s_{A_x} + 2b_x s_{K_t}).$$

Otrzymane wyrażenia wykorzystamy do znalezienia odległości pomiędzy lewą i prawą stroną (5.4.1), to jest pomiędzy kwaternionami $Y_{x,t}$ oraz $\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t$.

Ustaliliśmy, że kwaternion $\tilde{A}_x(u) + \tilde{B}_x(u) \tilde{K}_t(u)$ tworzą dwie funkcje zespolone (5.4.20). Z kolei kwaternion $\tilde{Y}_{x,t}$ definiują funkcje zespolone postaci

$$g_{Y_{x,t}}(u) = y_{x,t} + i e_{x,t}(1-u), \quad (5.4.21)$$

$$\bar{g}_{Y_{x,t}}(u) = y_{x,t} - i e_{x,t}(1-u).$$

Oznacza to, że kwaternion $\tilde{Y}_{x,t} - (\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t)$ określony będzie przez następujące funkcje

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \bar{g}_{Y_{x,t}}(u) - f_{A_x+B_x K_t}(u) = \\ &= y_{x,t} - a_x + 2(1-u)^2 s_{B_x} s_{K_t} + i(1-u)(s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(u) &= g_{Y_{x,t}}(u) - g_{A_x+B_x K_t}(u) = \\ &= y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t - i(1-u)(s_{A_x} - e_{x,t} + 2b_x s_{K_t}). \end{aligned}$$

Kwadrat normy kwaternionu $\tilde{Y}_{x,t} - (\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t)$ w przestrzeni $\mathbb{H}$ wyrażony jest wzorem

$$\|\tilde{Y}_{x,t} - (\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t)\|_{\mathbb{H}}^2 = |\phi(u)|^2 + |\psi(u)|^2.$$

Poszczególne kwadraty modułów przyjmują postać

$$\begin{aligned} |\phi(u)|^2 &= (y_{x,t} - a_x + 2(1-u)^2 s_{B_x} s_{K_t})^2 + (1-u)^2 (s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x})^2 = \\ &= (y_{x,t} - a_x)^2 + 4(1-u)^2 s_{B_x} s_{K_t} (y_{x,t} - a_x) + \\ &+ 4(1-u)^4 s_{B_x}^2 s_{K_t}^2 + (1-u)^2 (s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x})^2. \end{aligned}$$

$$|\psi(u)|^2 = (y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t)^2 + (1-u)^2 (s_{A_x} - e_{x,t} + 2b_x s_{K_t})^2.$$

Norma (5.4.18) kwaternionu $\tilde{Y}_{x,t} - (\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t)$ może być zapisana jako

$$||\tilde{Y}_{x,t} - (\tilde{A}_x + \tilde{B}_x \tilde{K}_t)||_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^1 |\phi(u)|^2 du + \int_0^1 |\psi(u)|^2 du, \quad (5.4.22)$$

a poszczególne całki dają się przekształcić następująco

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\phi(u)|^2 du &= (y_{x,t} - a_x)^2 + 4s_{B_x} s_{K_t} (y_{x,t} - a_x) \int_0^1 (1-u)^2 du + \\ &+ 4s_{B_x}^2 s_{K_t}^2 \int_0^1 (1-u)^4 du + (s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x})^2 \int_0^1 (1-u)^2 du = \\ &= (y_{x,t} - a_x)^2 + \frac{4}{3} s_{B_x} s_{K_t} (y_{x,t} - a_x) + \frac{4}{5} s_{B_x}^2 s_{K_t}^2 + \frac{1}{3} (s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x})^2. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\psi(u)|^2 du &= (y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t)^2 + \int_0^1 (1-u)^2 (s_{A_x} - e_{x,t} + 2b_x s_{K_t})^2 du = \\ &= (y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t)^2 + \frac{1}{3} (s_{A_x} - e_{x,t} + 2b_x s_{K_t})^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} d_{x,t} &\equiv ||\tilde{Y}_{x,t} - \tilde{A}_x - \tilde{B}_x \tilde{K}_t||_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^1 |\phi(u)|^2 du + \int_0^1 |\psi(u)|^2 du = \\ &= (y_{x,t} - a_x)^2 + \frac{4}{3} s_{B_x} s_{K_t} (y_{x,t} - a_x) + \frac{4}{5} s_{B_x}^2 s_{K_t}^2 + \frac{1}{3} (s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x})^2 + \\ &+ (y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t)^2 + \frac{1}{3} (s_{A_x} - e_{x,t} + 2b_x s_{K_t})^2. \end{aligned}$$

Wówczas funkcjonal (5.4.19), który służyć nam będzie do oszacowania parametrów modelu, możemy zapisać

$$F(a_x, b_x, k_t, s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}) = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T d_{x,t}. \quad (5.4.23)$$

Zakładamy przy tym, że wartości $y_{x,t} = \ln m_{x,t}$ oraz $e_{x,t}$, $x=0, 1, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$, są znane. Te ostatnie możemy wyznaczyć metodą przełącznikowej fazyfikacji macierzy obserwacji, opisaną w rozdziale 4 (paragraf 4.4). Ponadto, przez analogię do modelu Lee–Cartera, przyjmujemy warunki ograniczające

$$\sum_{x=0}^X b_x = 1, \quad \sum_{t=1}^T k_t = 0. \quad (5.4.24)$$

Aby bliżej poznać relacje wiążące a_x, b_x, k_t , wyznaczmy pochodne cząstkowe funkcjonału (5.4.23) względem wymienionych współczynników. Mamy

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_x} = - \sum_{t=1}^T 2(y_{x,t} - a_x) + \frac{4}{3} s_{B_x} s_{K_t} + 2(y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t), \\ \frac{\partial F}{\partial b_x} = - \sum_{t=1}^T 4k_t(y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t) - \frac{4}{3} s_{K_t}(s_{A_x} - e_{x,t} + 2b_x s_{K_t}), \\ \frac{\partial F}{\partial k_t} = - \sum_{x=0}^X 4b_x(y_{x,t} - a_x - 2b_x k_t) - \frac{4}{3} s_{B_x}(s_{A_x} - e_{x,t} + 2k_t s_{B_x}). \end{cases} \quad (5.4.25)$$

Po przyrównaniu do zera wyrażeń występujących po prawej stronie układu (5.4.25) oraz zakładając $\sum_{t=1}^T k_t = 0$, otrzymujemy następujące zależności

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{x,t} + \frac{1}{3} s_{B_x} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_{K_t} = \bar{y}_x + \frac{1}{3} s_{B_x} \bar{s}_{K_t}, \quad (5.4.26)$$

$$b_x = \frac{\sum_{t=1}^T k_t(y_{x,t} - a_x) - \frac{1}{3} \sum_{t=1}^T s_{K_t}(s_{A_x} - e_{x,t})}{2 \sum_{t=1}^T k_t^2 + \frac{2}{3} \sum_{t=1}^T s_{K_t}^2}, \quad (5.4.27)$$

$$k_t = \frac{\sum_{x=0}^X b_x(y_{x,t} - a_x) - \frac{1}{3} \sum_{x=0}^X s_{B_x}(s_{A_x} - e_{x,t})}{2 \sum_{x=0}^X b_x^2 + \frac{2}{3} \sum_{x=0}^X s_{B_x}^2}.$$

W podobny sposób możemy wyprowadzić formuły dla $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$, przybliżając zależności łączące poszczególne parametry modelu.

Ogólna jednak idea estymacji modelu kwaternionowego polega na minimalizacji sumy (5.4.23) przy warunkach ograniczających (5.4.24), z użyciem wybranego algorytmu optymalizacji nieliniowej.

5.5. Uwagi końcowe

Modele umieralności, zaproponowane w tym rozdziale, skonstruowane zostały przez analogię do rozmytego modelu Lee–Cartera EFLC, opartego na algebrze skierowanych liczb rozmytych. W każdym z proponowanych podejść, to jest zarówno w modelu rozmytym MFMM, jak i w modelach zespolonych CFMM oraz CNMM, metoda estymacji parametrów opiera się na idei fazyfikacji macierzy obserwacji oraz na optymalizacji nieliniowej funkcji celu, zdefiniowanej w kategoriach odległości pomiędzy obserwacjami a wartościami teoretycznymi wyznaczonymi z modelu. Przykładowe wyniki estymacji modeli MFMM oraz CNMM z wykorzystaniem danych rzeczywistych oraz prognozy otrzymane na ich podstawie, a także porównanie z wynikami prognoz uzyskanymi w standardowym modelu Lee–Cartera zostały zamieszczone w następnym rozdziale.

Rozdział 6

Estymacja i ewaluacja modeli umieralności

6.1. Wprowadzenie

W celu ilustracji rozważań teoretycznych przedstawionych w poprzednich rozdziałach, dotyczących propozycji nowych modeli umieralności, dokonano estymacji modeli klasy MP (3.6.1)–(3.6.2), EHLC (3.7.1)–(3.7.2), MFMM (5.2.8)–(5.2.11) i CNMM (5.4.1)–(5.4.3) na podstawie danych rzeczywistych i porównano błędy prognoz wygasłych z analogicznymi błędami dla standardowego modelu Lee–Cartera LC (1.8.1)–(1.8.4), a niekiedy też z błędami prognoz dla dynamicznego (niehybrydowego) modelu Lee–Cartera DLC (1.8.54)–(1.8.55) i modelu Giacometii G (1.8.74)–(1.8.75).

W analizie wykorzystane zostały częściowe, przekrojowe współczynniki zgonów dla Polski z lat 1958–2014, w grupie mężczyzn i kobiet. Dane zaczerpnięto z bazy Human Mortality Database (www.mortality.org) oraz z bazy GUS (stat.gov.pl). Współczynniki zgonów z okresu 2001–2014 zostały wykorzystane do ewaluacji własności prognostycznych rozważanych modeli i nie były wykorzystane na etapie estymacji.

Dla większej przejrzystości rezultatów, otrzymane oceny parametrów przedstawione zostały w formie rysunków, przy czym w przypadku wyników znacząco odbiegających od oszacowań w standardowym modelu Lee–Cartera, w celach porównawczych wykreślono dodatkowo te ostatnie.

Należy zaznaczyć, że w przypadku modelu MFMM opartego na liczbach rozmytych oraz modelu CNMM opartego na funkcjach zespolonych, etapem poprzedzającym estymację była tzw. fazyfikacja macierzy obserwacji z wykorzystaniem „punktów przełączenia”, czyli punktów (tutaj lat), w których zaobserwowano statystycznie istotną zmianę kierunku trendu dla logarytmów częściowych współczynników zgonów. Punkty te zostały zidentyfikowane za pomocą testu statystycznego JL, którego podstawy teoretyczne wraz z liczbowym przykładem przedstawione zostały w rozdziale 4, w paragrafie 4.4.3.

W tablicy 6.1 zamieszczone zostały wyniki testu JL otrzymane na podstawie cząstkowych współczynników zgonów, odnotowanych w Polsce w kolejnych latach okresu 1958–2000, osobno w grupie mężczyzn i kobiet.

Tablica 6.1. Punkty (lata) przełączenia

Mężczyźni			Kobiety		
x	m	rok	x	m	rok
0	33	1991	0	36	1994
4	29	1987	1	16	1974
11	12	1970	23	7	1966
15	37	1995	24	7	1966
17	30	1988	25	8	1966
20	6	1964	27	9	1966
26	33	1991	29	9	1966
27	37	1995	30	11	1966
31	32	1990	35	36	1994
33	33	1991	40	33	1991
35	33	1991	41	34	1992
37	33	1991	42	9	1966
38	33	1991	43	7	1965
38	33	1991	60	33	1991
40	34	1992	61	34	1991
41	33	1991	62	33	1991
42	33	1991	66	33	1991
43	33	1991	67	33	1991
44	33	1991	68	35	1993
45	33	1991	69	33	1991
46	33	1991	70	32	1990
47	33	1991	71	33	1991
50	33	1991	72	37	1995
51	33	1991	73	35	1993
52	33	1991	74	36	1994
53	33	1991	75	37	1995
54	33	1991	86	27	1985
55	33	1991	88	37	1995
56	33	1991	89	37	1995
57	33	1991	90	34	1991
58	34	1992			
59	33	1991			
61	33	1991			
62	33	1991			
63	33	1991			
64	33	1991			
67	33	1991			
93	26	1984			
99	9	1966			

Źródło: obliczenia własne.

Wyszczególnione zostały te grupy wieku, dla których punkty przełączenia okazały się statystycznie istotne na poziomie istotności 0,05. W każdym z wymienionych przypadków podano jeden taki punkt.

W przypadku dynamicznego, hybrydowego modelu Milevskiego–Promisłowa (3.6.1)–(3.6.2) i dynamicznego, hybrydowego modelu Lee–Cartera (3.7.1)–(3.7.2) przyjęto dla uproszczenia wspólne punkty przełączenia, ustalone na podstawie danych z tablicy 6.1, poprzez wybór najczęściej powtarzających się obserwacji (lat).

6.2. Wyniki estymacji dynamicznego, hybrydowego modelu Lee–Cartera

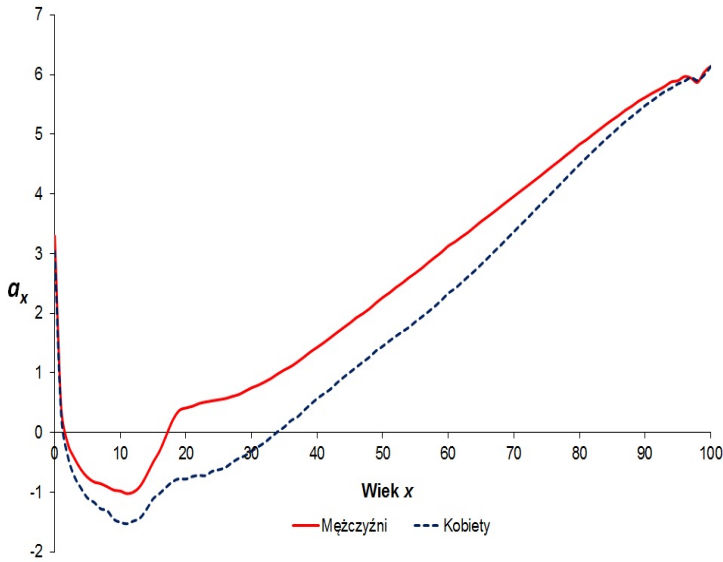
Rysunki 6.1–6.6 prezentują oszacowania a_x , b_x , k_t , q_x^2 , σ_x^2 parametrów uogólnionego, skalarnego, hybrydowego modelu Lee–Cartera dla Polski (3.7.1)–(3.7.2), otrzymane na podstawie cząstkowych współczynników zgonów dla mężczyzn i kobiet z lat 1958–2000. W odniesieniu do k_t wykreślone zostały także wyniki otrzymane dla standardowego modelu Lee–Cartera, różnią się one bowiem znacząco.

Oszacowania k_t w modelu EHLC oparto na estymacji układu (3.7.2), przy czym w analizowanym okresie 1958–2000 wyodrębnione zostały dwa punkty przełączenia, którymi były lata 1966 oraz 1991. Innymi słowy, podczas estymacji parametrów układu (3.7.2) uwzględnione zostały trzy podokresy $I_1 = [1958, 1965]$, $I_2 = [1966, 1990]$, $I_3 = [1991, 2000]$.

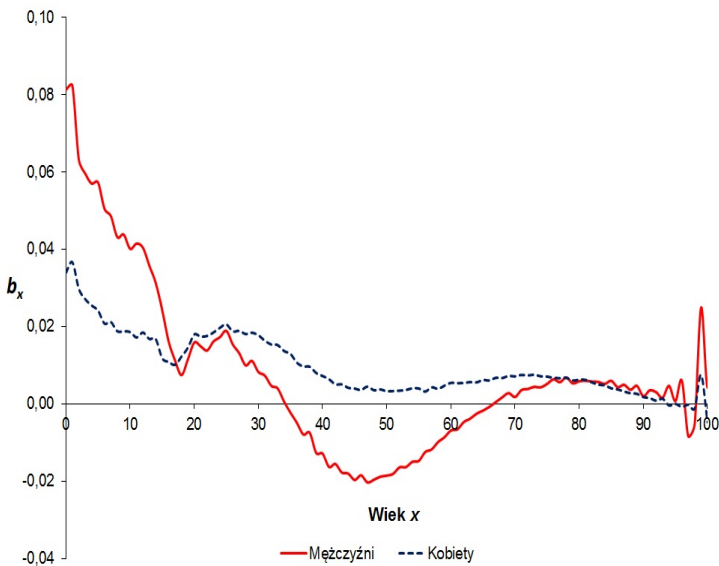
Na podstawie porównania krzywych na rysunku 6.1 wnioskujemy, że niemal we wszystkich grupach wieku średni poziom umieralności był wyższy dla mężczyzn niż dla kobiet, przy czym widoczny jest zbliżony wzorec umieralności, charakteryzujący się relatywnie wysoką umieralnością w grupie dzieci do 2 lat, niską dla dzieci w wieku 8–12 lat i rosnącą dla coraz starszych grup wieku.

Układ krzywych na rysunku 6.2 wskazuje, że „wrażliwość” współczynników zgonów na zmiany umieralności w czasie w niektórych grupach wieku była wyraźnie większa wśród mężczyzn w porównaniu do kobiet. Z kolei z rysunków 6.3 i 6.4 wynika, że umieralność w badanym okresie wykazywała ogólną tendencję spadkową, przy czym tempo spadku nie było jednakowe w badanym okresie. Było także szybsze w subpopulacji kobiet.

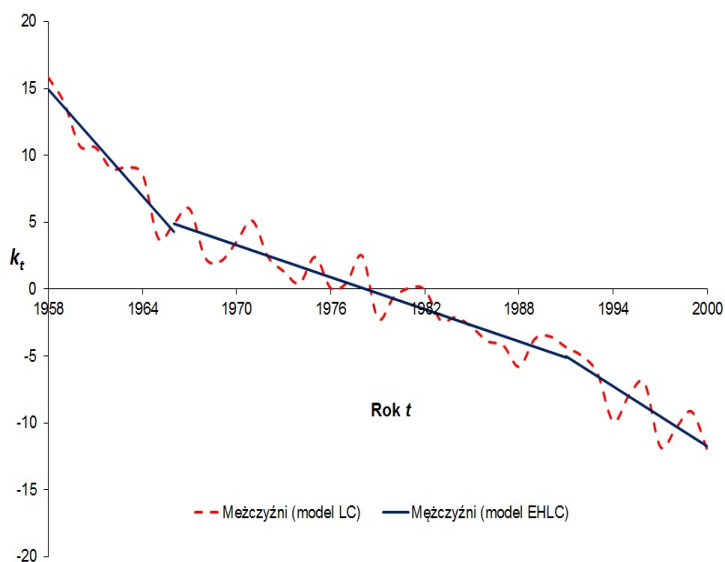
Parametry q_x^2 są związane z pojęciem białego szumu, który jest procesem abstrakcyjnym. Parametry te uwzględniono w modelu w charakterze członu korekcyjnego, nie posiadają one interpretacji fizycznej.



Rys. 6.1. Oszacowania parametrów a_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ w modelu EHLC (3.7.1)–(3.7.2) w grupie mężczyzn i kobiet
Źródło: opracowanie własne

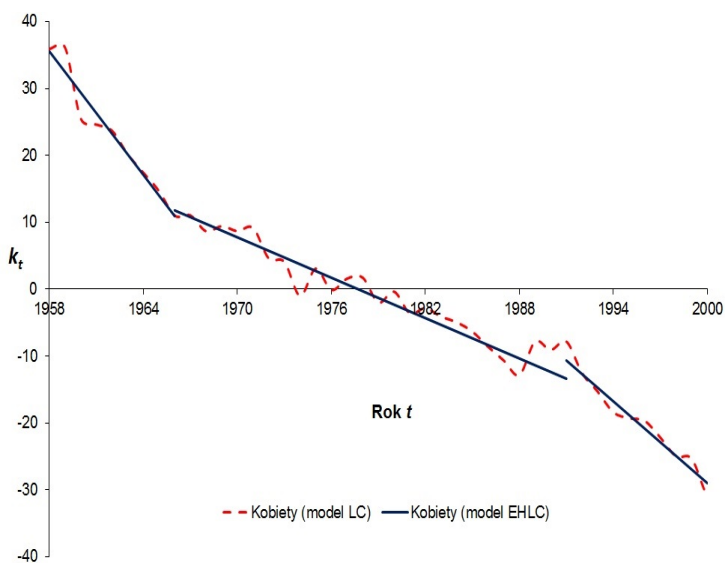


Rys. 6.2. Oszacowania parametrów b_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ w modelu EHLC (3.7.1)–(3.7.2) w grupie mężczyzn i kobiet
Źródło: opracowanie własne



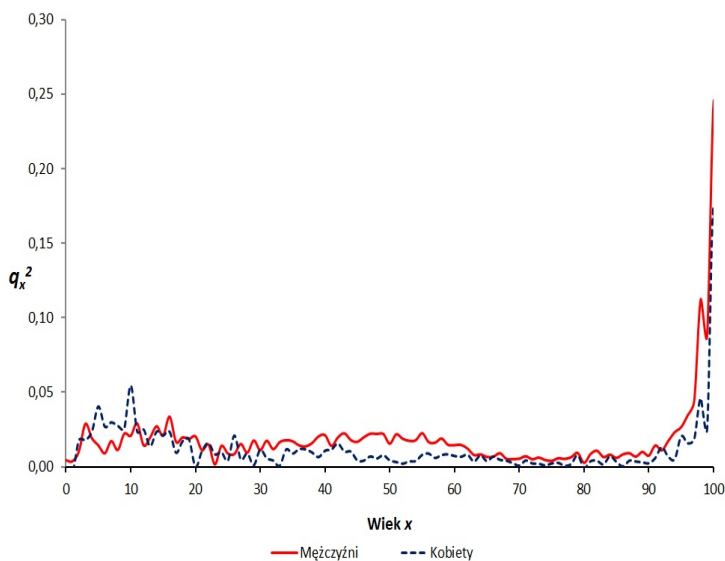
Rys. 6.3. Oszacowania parametrów k_t , $t = 1958, \dots, 2000$
w modelach LC i EHLC (3.7.1)–(3.7.2) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne

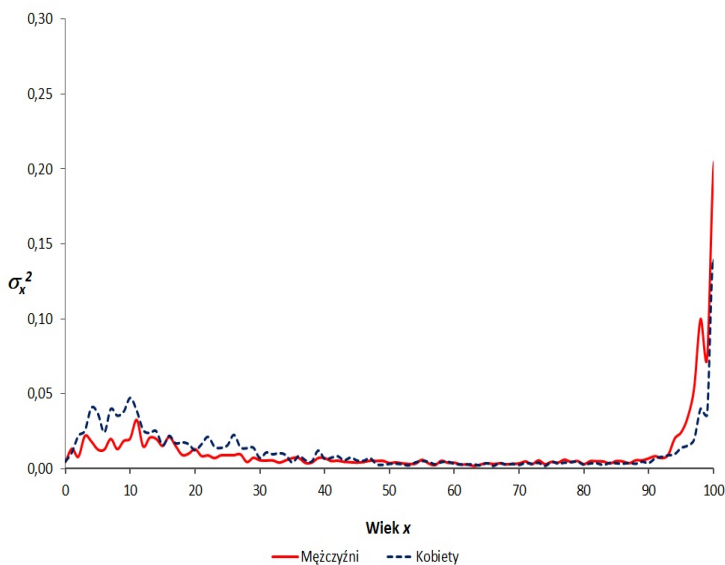


Rys. 6.4. Oszacowania parametrów k_t , $t = 1958, \dots, 2000$
w modelach LC i EHLC (3.7.1)–(3.7.2) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.5. Oszacowania parametrów q_x^2 , $x = 0, 1, \dots, 100$
w modelu EHLC (3.7.1)–(3.7.2)
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6.6. Oszacowania parametrów σ_x^2 , $x = 0, 1, \dots, 100$
w modelu EHLC (3.7.1)–(3.7.2)
Źródło: opracowanie własne

W celu porównania własności prognostycznych modeli LC i EHLC wykorzystane zostały miary błędów dla prognoz wygasłych (prognoz *ex post*), wyznaczone osobno dla każdego roku z okresu 2001–2014, to jest z okresu pominiętego przy estymacji parametrów.

W porównaniach uwzględnione zostały dwie miary błędów, to jest błąd średniokwadratowy MSE i średni błąd absolutny MAD , określone wzorami

$$MSE_t^{(LC)} = \sqrt{\frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} [\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)]^2}, \quad (6.2.1)$$

$$MAD_t^{(LC)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} |\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)|,$$

$$MSE_t^{(EHLC)} = \sqrt{\frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} \ln m_{x,t} - \ln m_{x,t-1} + b_x(k_t - k_{t-1}) + \frac{1}{2}(q_x^2 - \sigma_x^2)}^2, \quad (6.2.2)$$

$$MAD_t^{(EHLC)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} \ln m_{x,t} - \ln m_{x,t-1} + b_x(k_t - k_{t-1}) + \frac{1}{2} q_x^2 - \sigma_x^2.$$

Wartości wymienionych miar dla obu porównywanych modeli LC oraz EHLC prezentują tablice 6.2 i 6.3.

Z analizy zawartości tablic 6.2 i 6.3 wynika, że model EHLC charakteryzuje się zdecydowanie lepszymi własnościami prognostycznymi, co jest zauważalne szczególnie w grupie mężczyzn.

Jak pokazują dane w kolumnach 3 i 5, średnie odchylenia prognoz logarytmów cząstkowych współczynników zgonów od ich wartości odnotowanych w latach 2001–2014, mierzone za pomocą błędu średniokwadratowego MSE i średniego błędu absolutnego MAD , są wyraźnie mniejsze niż dla prognoz opartych na standardowym modelu Lee–Cartera (kolumny 2 i 4).

Tablica 6.2. Porównanie *ex post* miar *MSE*
dla modeli LC i EHLC

Rok	Mężczyźni		Kobiety	
	LC	EHLC	LC	EHLC
2001	0,197	0,098	0,098	0,104
2002	0,204	0,046	0,122	0,051
2003	0,215	0,052	0,122	0,063
2004	0,223	0,039	0,132	0,061
2005	0,230	0,037	0,146	0,095
2006	0,232	0,055	0,152	0,060
2007	0,238	0,042	0,172	0,077
2008	0,257	0,061	0,174	0,067
2009	0,281	0,067	0,191	0,093
2010	0,330	0,064	0,190	0,106
2011	0,341	0,076	0,218	0,077
2012	0,373	0,047	0,215	0,059
2013	0,406	0,050	0,246	0,072
2014	0,469	0,101	0,273	0,062

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 6.3. Porównanie *ex post* miar *MAD*
dla modeli LC i EHLC

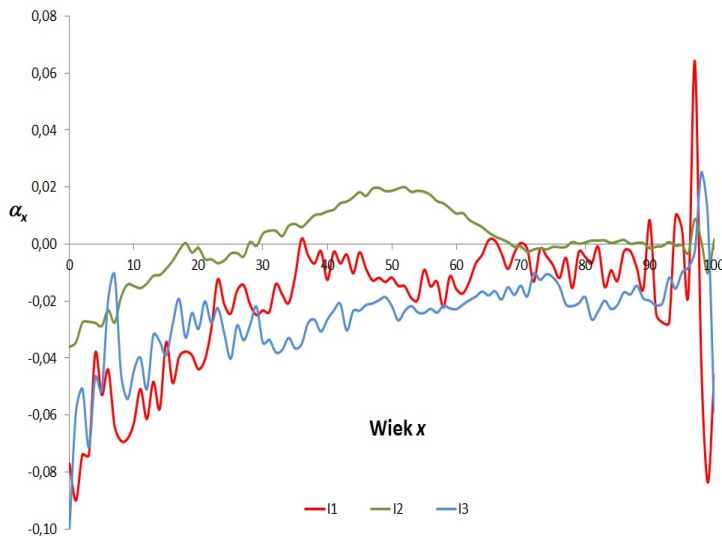
Rok	Mężczyźni		Kobiety	
	LC	EHLC	LC	EHLC
2001	0,182	0,079	0,083	0,070
2002	0,185	0,035	0,107	0,043
2003	0,195	0,040	0,109	0,037
2004	0,206	0,033	0,117	0,041
2005	0,214	0,025	0,129	0,054
2006	0,214	0,030	0,130	0,039
2007	0,219	0,022	0,152	0,049
2008	0,234	0,039	0,156	0,038
2009	0,250	0,044	0,170	0,048
2010	0,302	0,052	0,167	0,078
2011	0,307	0,043	0,191	0,047
2012	0,335	0,034	0,185	0,036
2013	0,359	0,038	0,221	0,045
2014	0,430	0,070	0,245	0,048

Źródło: opracowanie własne.

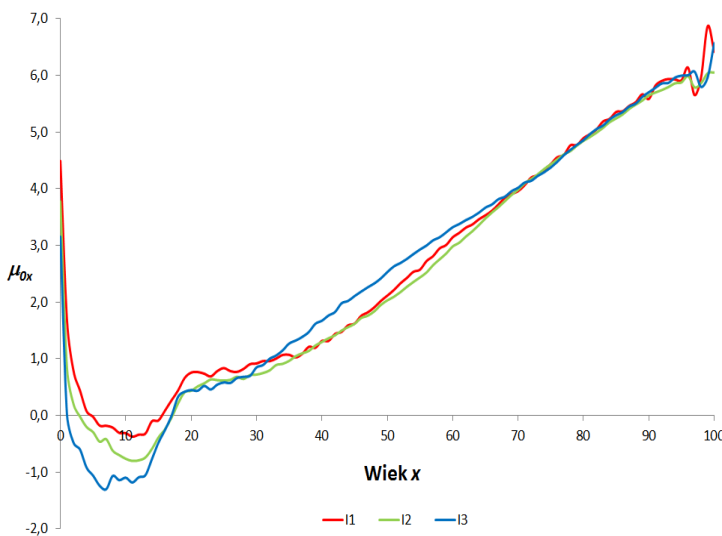
6.3. Wyniki estymacji hybrydowego modelu Milevskiego–Promisłowa

W celu ilustracji wyników estymacji modelu Milevskiego–Promisłowa MP, wybrano jeden model tej klasy, tj. ze skalarnym, liniowym filtrem.

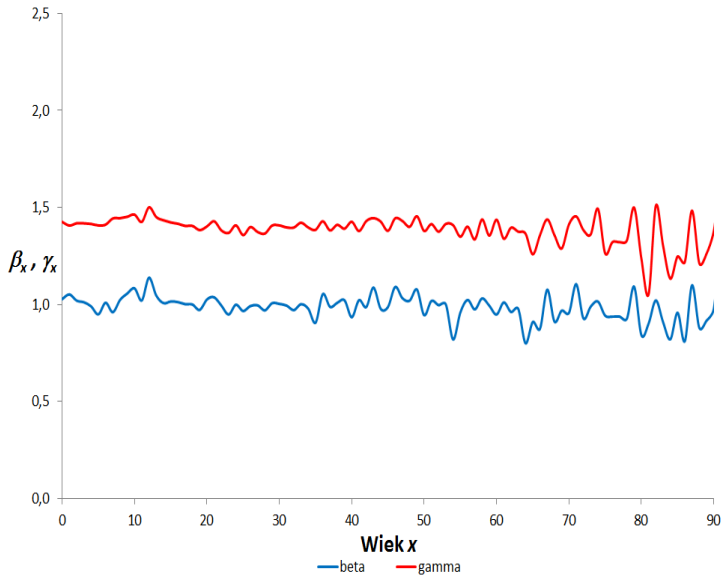
W analizie rozważano szeregi czasowe logarytmów współczynników zgonów $\ln m_{x,t}$, dla $x = 0, \dots, X$ oraz t przebiegającego zbiór indeksów kolejnych lat należących do podokresów $I_1 = [1958, 1965]$, $I_2 = [1966, 1990]$, $I_3 = [1991, 2000]$. Wyniki estymacji przedstawiono na rysunkach 6.7–6.16.



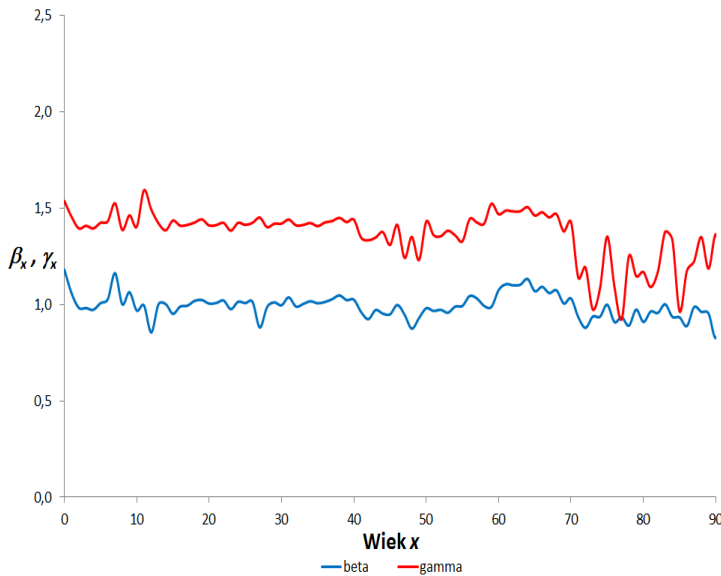
Rys. 6.7. Oszacowania parametrów α_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresów I_1, I_2, I_3 (mężczyźni)
Źródło: opracowanie własne



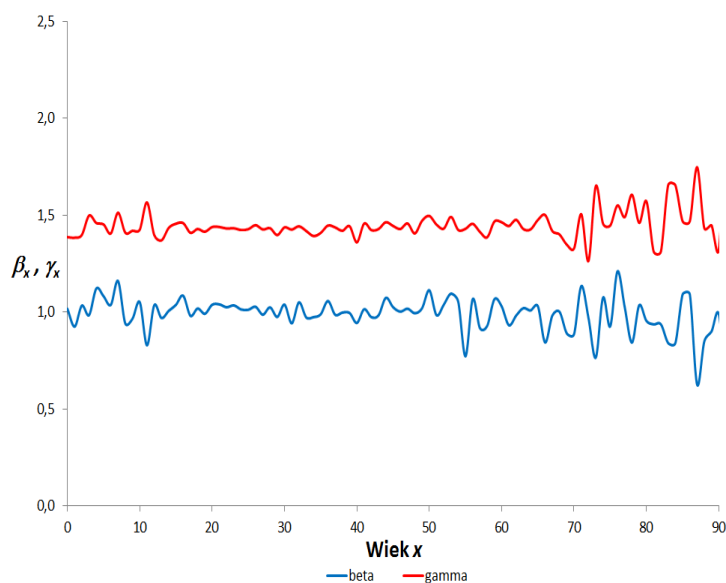
Rys. 6.8. Oszacowania parametrów $\ln \mu_{0x}$, $x = 0, 1, \dots, 100$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresów I_1, I_2, I_3 (mężczyźni)
Źródło: opracowanie własne



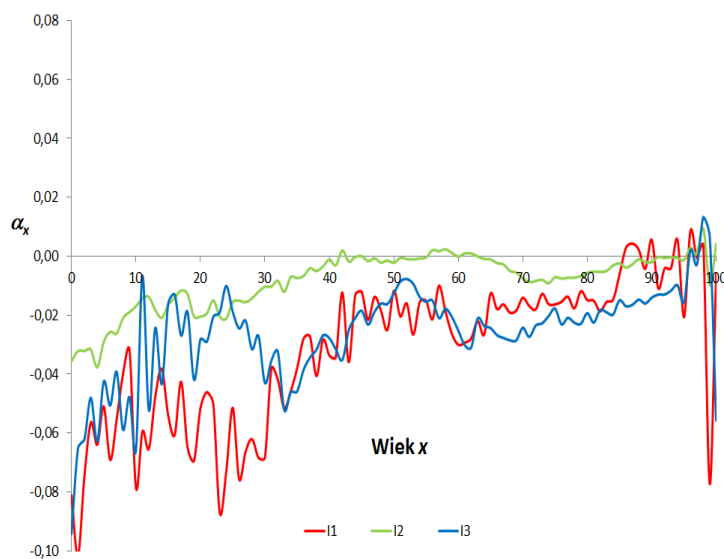
Rys. 6.9. Oszacowania parametrów $\beta_x, \gamma_x, x = 0, 1, \dots, 90$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresu I_1 (mężczyźni)
Źródło: opracowanie własne



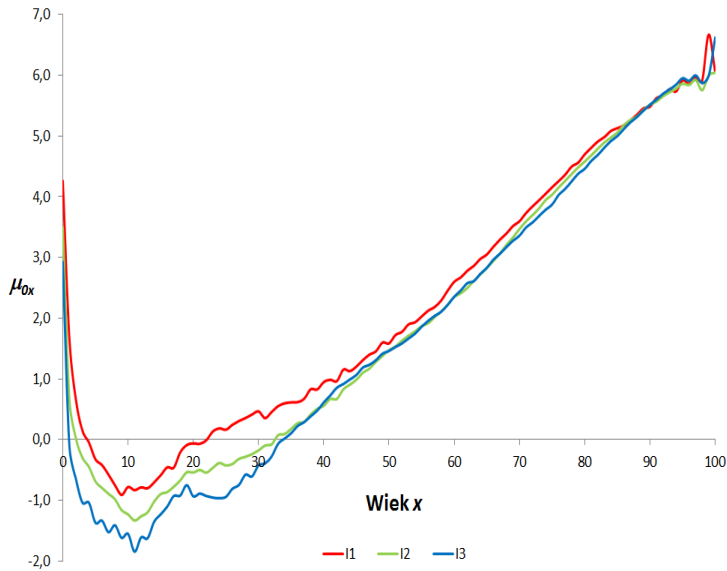
Rys. 6.10. Oszacowania parametrów $\beta_x, \gamma_x, x = 0, 1, \dots, 90$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresu I_2 (mężczyźni)
Źródło: opracowanie własne



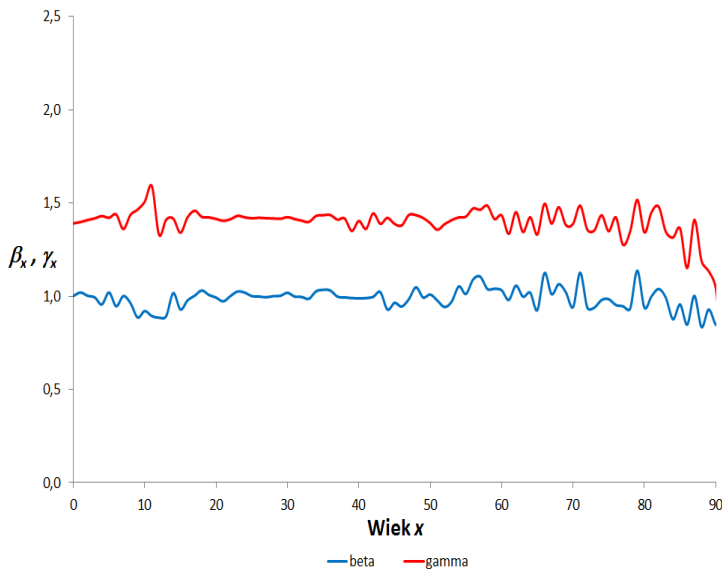
Rys. 6.11. Oszacowania parametrów $\beta_x, \gamma_x, x = 0, 1, \dots, 90$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresu I_3 (mężczyźni)
Źródło: opracowanie własne



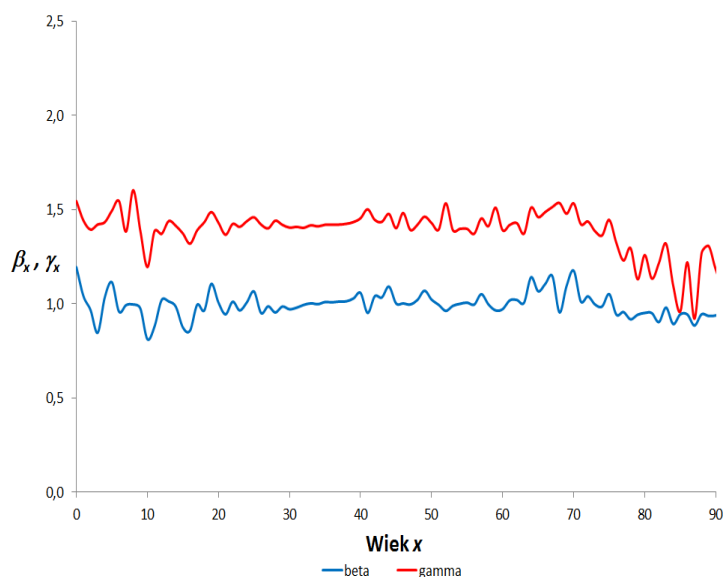
Rys. 6.12. Oszacowania parametrów $\alpha_x, x = 0, 1, \dots, 100$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresów I_1, I_2, I_3 (kobiety)
Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.13. Oszacowania parametrów $\ln \mu_{0x}$, $x = 0, 1, \dots, 100$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresów I_1, I_2, I_3 (kobiety)
Źródło: opracowanie własne

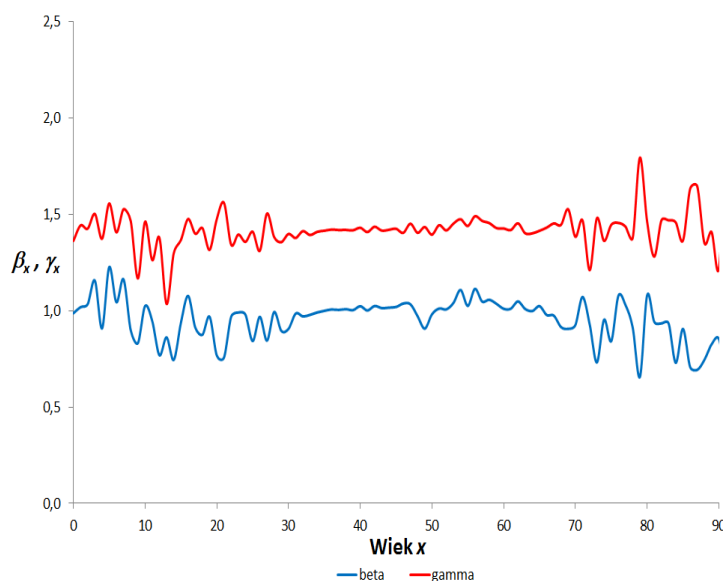


Rys. 6.14. Oszacowania parametrów β_x, γ_x , $x = 0, 1, \dots, 90$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresu I_1 (kobiety)
Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.15. Oszacowania parametrów $\beta_x, \gamma_x, x = 0, 1, \dots, 90$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresu I_2 (kobiety)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.16. Oszacowania parametrów $\beta_x, \gamma_x, x = 0, 1, \dots, 90$ w modelu MP (3.6.1)–(3.6.2) dla podokresu I_3 (kobiety)

Źródło: opracowanie własne

W celu porównania własności hybrydowego modelu Milewskiego–Promisłowa i modelu zaproponowanego przez Giacometti i współautorów, przedstawionego w paragrafie 1.8.6 w rozdziale 1, wykorzystane zostały

miary błędów prognoz *ex post*, obliczone dla każdego roku z przedziału 2001–2014, tj. dla okresu pominiętego podczas estymacji parametrów.

W przypadku uogólnionego, hybrydowego modelu Milevskiego–Promisłowa (3.6.1)–(3.6.2) miary MSE i MAD przybierają postać

$$MSE_t^{(MP)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} (\ln m_{x,t} - E_t[z_{x_1}])^2, \quad (6.3.1)$$

$$MAD_t^{(MP)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} |\ln m_{x,t} - E_t[z_{x_1}]|,$$

gdzie $E_t[z_{x_1}]$ jest oczekiwaną wartością logarytmu cząstkowego współczynnika zgonów w grupie wieku x w roku t , wyrażoną wzorem (3.7.15) i znalezioną za pomocą procedury iteracyjnej omówionej w paragrafie 3.8.2.

Dla modelu Giacometti i in. (1.8.74)–(1.8.75) analogiczne miary wyrażają się wzorami

$$MSE_t^{(G)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} [\ln m_{x,t} - (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \ln m_{x,t-1})]^2, \quad (6.3.2)$$

$$MAD_t^{(G)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} |\ln m_{x,t} - (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \ln m_{x,t-1})|,$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ są określone w (1.8.77).

Dla dynamicznego modelu Lee–Cartera DLC (1.8.54)–(1.8.55) mamy z kolei

$$MSE_t^{(DLC)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} [\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)]^2, \quad (6.3.3)$$

$$MAD_t^{(DLC)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} |\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)|.$$

Tablice 6.4 i 6.5 zawierają zestawienie wartości błędów *ex post* średniokwadratowych i absolutnych dla modeli Milevskiego–Promisłowa MP, Giacometti i in. G oraz dynamicznego modelu Lee–Cartera DLC.

Analiza danych ujętych w tablicach 6.4 i 6.5 pozwala stwierdzić, że hybrydowy model MP dostarcza trafniejszych prognoz umieralności niż modele G oraz DLC, na co wskazują mniejsze błędy prognozy dla lat 2001–2014. Rezultaty nie są jednak lepsze niż w przypadku omawianego wcześniej modelu EHLC (por. tablice 6.2 i 6.3).

Tablica 6.4. Porównanie *ex post* miar *MSE*
dla modeli MP, G i DLC

Rok	Mężczyźni			Kobiety		
	MP	G	DLC	MP	G	DLC
2001	0,096	0,121	0,015	0,078	0,108	0,020
2002	0,090	0,138	0,100	0,099	0,139	0,109
2003	0,080	0,152	0,107	0,088	0,148	0,125
2004	0,089	0,178	0,102	0,099	0,152	0,110
2005	0,097	0,193	0,107	0,147	0,170	0,116
2006	0,115	0,194	0,111	0,147	0,173	0,154
2007	0,139	0,210	0,122	0,150	0,178	0,149
2008	0,141	0,231	0,129	0,153	0,180	0,155
2009	0,139	0,255	0,142	0,198	0,200	0,156
2010	0,155	0,306	0,147	0,175	0,227	0,183
2011	0,159	0,319	0,178	0,200	0,244	0,167
2012	0,179	0,350	0,197	0,195	0,254	0,193
2013	0,189	0,384	0,222	0,227	0,269	0,185
2014	0,201	0,451	0,247	0,239	0,288	0,215

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 6.5. Porównanie *ex post* miar *MAD*
dla modeli MP, G i DLC

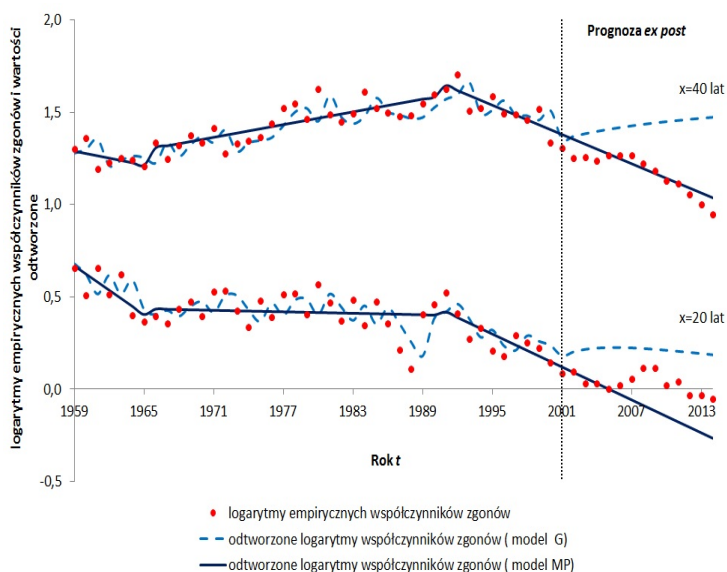
Rok	Mężczyźni			Kobiety		
	MP	G	DLC	MP	G	DLC
2001	0,076	0,105	0,010	0,056	0,091	0,016
2002	0,071	0,126	0,079	0,076	0,121	0,069
2003	0,057	0,140	0,088	0,068	0,131	0,087
2004	0,063	0,160	0,079	0,076	0,136	0,082
2005	0,070	0,174	0,087	0,108	0,149	0,090
2006	0,083	0,179	0,093	0,107	0,150	0,110
2007	0,098	0,193	0,103	0,106	0,153	0,110
2008	0,102	0,208	0,108	0,115	0,159	0,117
2009	0,093	0,229	0,121	0,137	0,172	0,122
2010	0,100	0,277	0,123	0,136	0,207	0,139
2011	0,109	0,288	0,157	0,156	0,218	0,140
2012	0,116	0,317	0,175	0,150	0,228	0,158
2013	0,121	0,344	0,198	0,171	0,239	0,155
2014	0,131	0,413	0,219	0,184	0,254	0,176

Źródło: opracowanie własne.

Dla zilustrowania skali rozbieżności pomiędzy prognozami a rzeczywistymi danymi, na rysunkach 6.17 i 6.18 przedstawiono krzywe reprezentujące logarytmy empirycznych współczynników zgonów dla dwóch wybranych grup wieku $x = 20$ i $x = 40$ lat (linie przerywane) dla mężczyzn i kobiet w okresie 1958–2014 oraz odtworzone logarytmy współczynników zgonów dla tych grup wieku, wraz z ich prognozami dla lat 2001–2014 (linie ciągłe).

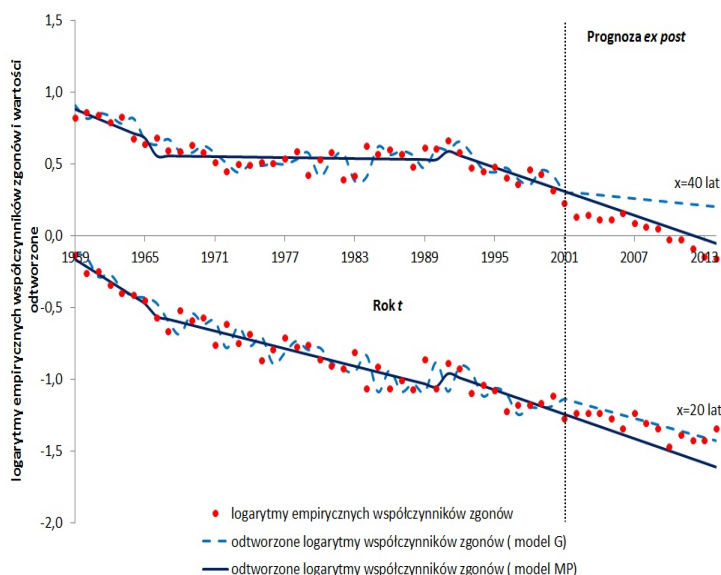
Podkreślić należy, że parametry modeli oszacowane zostały na podstawie danych za okres 1958–2000. Na rysunkach 6.17 oraz 6.18 krzywe ciągłe odpowiadające przedziałowi lat 2001–2014 stanowią prognozy analizowanych wielkości. Prognozy można następnie porównać z wartościami empirycznymi. Wynika z niego, iż rozbieżności pomiędzy wartościami empirycznymi i prognozami uzyskanymi z obu modeli wzrastają wraz z wydłużaniem się horyzontu prognozy.

Wskazuje to na potrzebę wyznaczania pasm ufności lub pasm rozmytości dla prognozowanych wielkości, zamiast rozważania pojedynczych trajektorii (prognoz punktowych). Możliwości takich dostarczają np. modele umieralności oparte na liczbach rozmytych lub funkcjach zespolonych. Przykładowe wyniki estymacji tego typu modeli zawarte zostały w kolejnych dwóch paragrafach.



Rys. 6.17. Empiryczne i odtworzone logarytmy współczynników zgonów uzyskane na podstawie modeli MP i G (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.18. Empiryczne i odtworzone logarytmy współczynników zgonów, uzyskane na podstawie modeli MP i G (kobiety)

Źródło: opracowanie własne

6.4. Wyniki estymacji modelu umieralności opartego na zmodyfikowanych liczbach rozmytych

Rozważmy model umieralności MFMM (5.2.8)–(5.2.11), odwołujący się do pojęcia i własności zmodyfikowanych liczb rozmytych MFN. Model ten ma strukturę, w której punkty przełączeń pomiędzy pookresami umieralności zostały uwzględnione na etapie fazyfikacji cząstkowych współczynników zgonów.

Rysunki 6.19–6.24 ilustrują oszacowania parametrów a_x, b_x, k_t , razem z ocenami parametrów rozmytości $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ uzyskanymi na podstawie modelu MFMM, osobno dla kobiet i mężczyzn. Interpretacja składników a_x, b_x, k_t jest analogiczna, jak w modelu Lee–Cartera (por. paragraf 6.2 lub paragraf 1.8.1 w rozdziale 1).

W tym przypadku dysponujemy dodatkowo ocenami $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t} \geq 0$, które pozwalają na wyznaczenie obszarów rozmytości dla a_x, b_x, k_t . Obszary te zaznaczone zostały na rysunkach 6.19–6.24 jako pasma ograniczone liniami przerywanymi.

Co więcej, wartości $s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}$ możemy traktować jako miary rozmytości dla odtworzonych lub prognozowanych logarytmów współczynników zgonów, uzyskanych na podstawie modelu.

Zmodyfikowane liczby rozmyte $\check{A}_x, \check{B}_x, \check{K}_t$, występujące w roli parametrów modelu MFMM, korespondują bowiem z symetrycznymi liczbami trójkątnymi, rozumianymi w klasycznym sensie i zapisywanymi jako uporządkowane pary wartości centralnych i rozpiętości

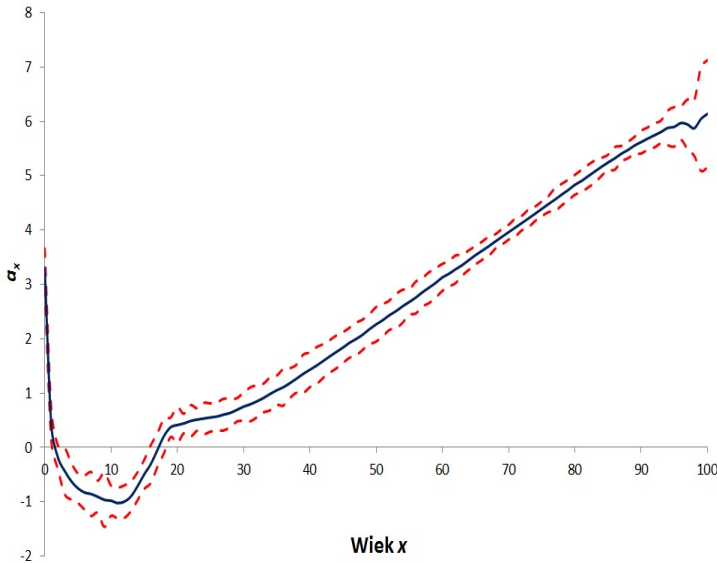
$$A_x = (a_x, s_{A_x}), \quad B_x = (b_x, s_{B_x}), \quad K_t = (k_t, s_{K_t}).$$

Wynikiem działań na tych liczbach, zgodnie z formułą (5.2.8), są zmodyfikowane liczby rozmyte $\check{A}_x \oplus (\check{B}_x \odot \check{K}_t)$. Odpowiadają one symetrycznym liczbom rozmytym, które przybierają kształt zbliżony do rozmytych liczb trójkątnych o wartościach centralnych i rozpiętościach równych dla każdego $x = 0, 1, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$, odpowiednio

$$a_x + b_x k_t, \quad s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t},$$

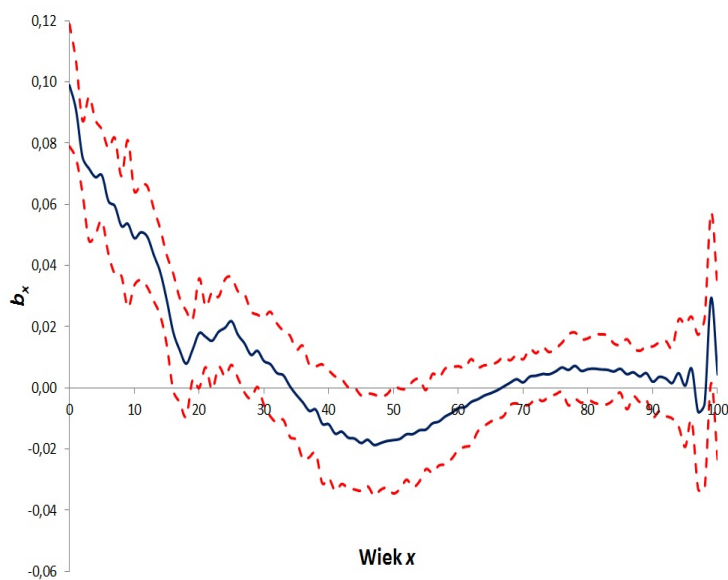
przy warunku $s_{A_x} - 2s_{B_x} s_{K_t} \geq 0$.

Oznacza to, że różnice $s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}$ możemy interpretować w kategoriach miar rozmytości dla odtworzonych lub prognozowanych logarytmów współczynników zgonów, otrzymanych z modelu MFMM.



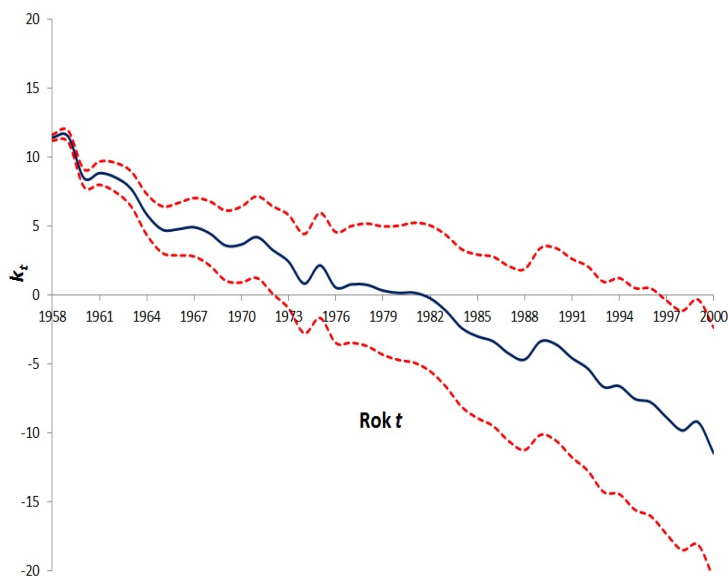
Rys. 6.19. Oszacowania parametrów a_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu MFMM (5.2.8)–(5.2.11) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



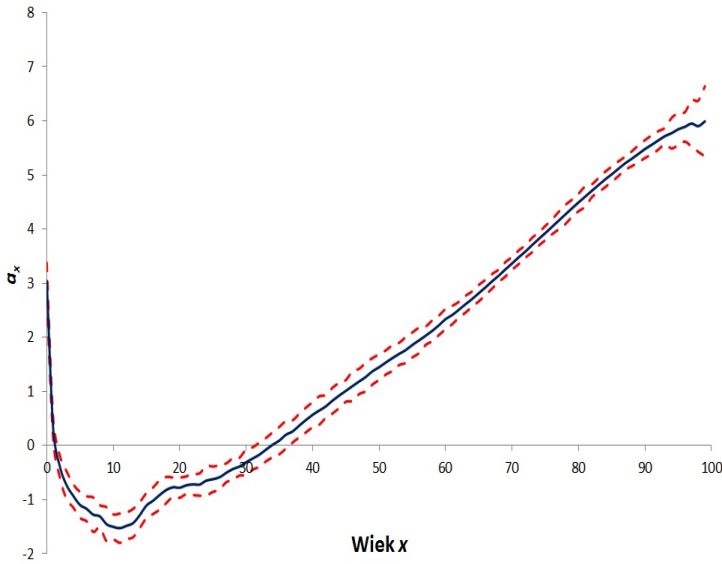
Rys. 6.20. Oszacowania parametrów b_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu MFMM (5.2.8)–(5.2.11) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



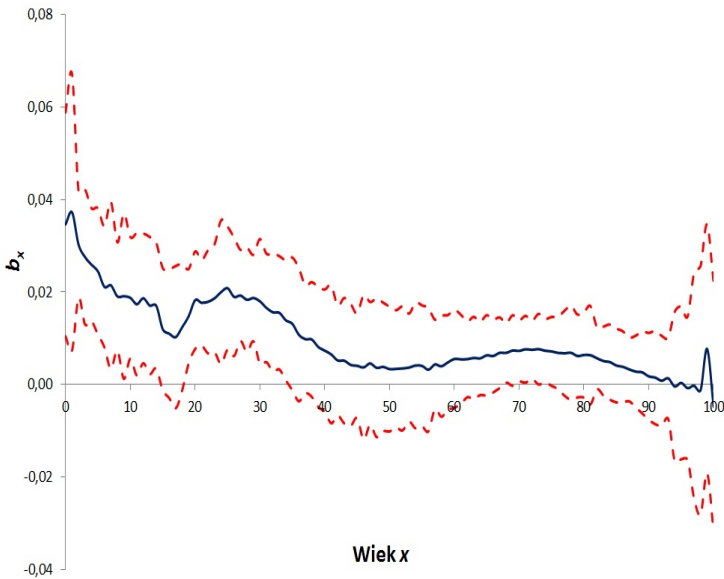
Rys. 6.21. Oszacowania parametrów k_t , $t = 1958, \dots, 2000$ oraz ich obszar rozmytości w modelu MFMM (5.2.8)–(5.2.11) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



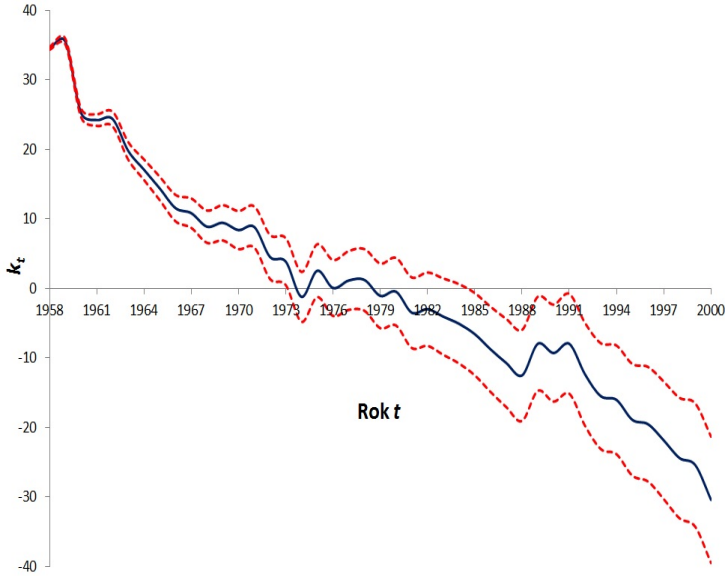
Rys. 6.22. Oszacowania parametrów a_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu MFMM (5.2.8)–(5.2.11) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.23. Oszacowania parametrów b_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu MFMM (5.2.8)–(5.2.11) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.24. Oszacowania parametrów k_t , $t = 1958, \dots, 2000$ oraz ich obszar rozmytości w modelu MFMM (5.2.8)–(5.2.11) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne

Ponieważ prognozowane na podstawie modelu MFMM wielkości korespondują z trójkątnymi, symetrycznymi liczbami romytych, więc do obliczenia miar błędów MAD oraz MSE wykorzystane zostały wartości centralne otrzymanych prognoz.

Miary MSE i MAD dla modelu LC definiują wzory (6.2.1). Analogiczną postać przyjmują także w przypadku modelu MFMM

$$MSE_t^{(\text{MFMM})} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} [\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)]^2, \quad (6.4.1)$$

$$MAD_t^{(\text{MFMM})} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} |\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)|,$$

przy czym a_x, b_x, k_t oznaczają tutaj parametry zmodyfikowanych liczb romytych $\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{K}_t$, oszacowane na podstawie modelu (5.2.8)–(5.2.11).

Otrzymane wartości średnie błędów prognoz *ex post* (tablice 6.6 i 6.7) przemawiają na korzyść modelu MFMM w porównaniu z modelem LC. Dodatkowo, model MFMM pozwala na ocenę niepewności w odniesieniu do uzyskanych oszacowań, a zwłaszcza współczynników umieralności, ponieważ daje możliwość wyznaczenia tzw. obszarów rozmytości (por. rysunek 6.25).

Tablica 6.6. Porównanie *ex post* miar *MSE*
dla modeli LC i MFMM

Rok	Mężczyźni		Kobiety	
	LC	MFMM	LC	MFMM
2001	0,197	0,186	0,098	0,098
2002	0,204	0,194	0,122	0,121
2003	0,215	0,202	0,122	0,122
2004	0,223	0,209	0,132	0,132
2005	0,230	0,214	0,146	0,146
2006	0,232	0,220	0,152	0,151
2007	0,238	0,223	0,172	0,171
2008	0,257	0,240	0,174	0,173
2009	0,281	0,262	0,191	0,190
2010	0,330	0,308	0,190	0,190
2011	0,341	0,321	0,218	0,217
2012	0,373	0,351	0,215	0,215
2013	0,406	0,383	0,246	0,246
2014	0,469	0,442	0,273	0,272

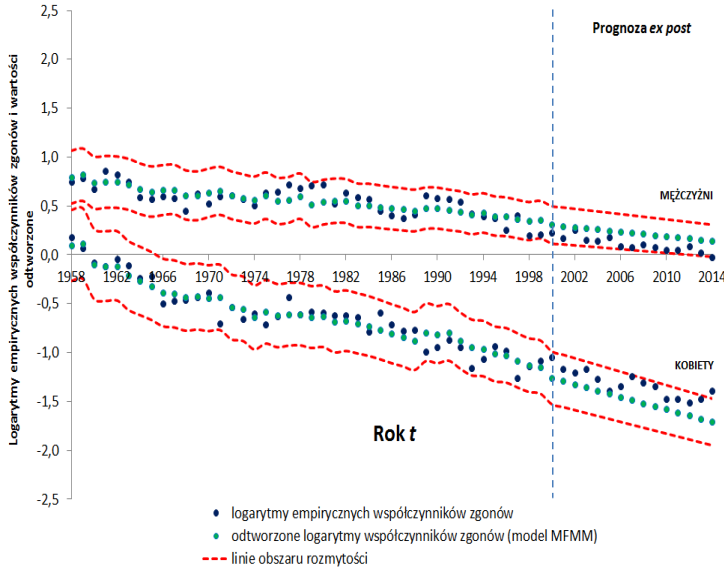
Źródło: opracowanie własne.

Tablica 6.7. Porównanie *ex post* miar *MAD*
dla modeli LC i MFMM

Rok	Mężczyźni		Kobiety	
	LC	MFMM	LC	MFMM
2001	0,182	0,171	0,083	0,082
2002	0,185	0,175	0,107	0,107
2003	0,195	0,181	0,109	0,109
2004	0,206	0,191	0,117	0,116
2005	0,214	0,197	0,129	0,128
2006	0,214	0,203	0,130	0,129
2007	0,219	0,208	0,152	0,152
2008	0,234	0,219	0,156	0,156
2009	0,250	0,232	0,170	0,168
2010	0,302	0,281	0,167	0,166
2011	0,307	0,288	0,191	0,191
2012	0,335	0,318	0,185	0,185
2013	0,359	0,341	0,221	0,220
2014	0,430	0,410	0,245	0,245

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 6.25 ilustruje empiryczne i odtworzone logarytmy współczynników zgonów, wraz z ich obszarami rozmytości, dla mężczyzn i kobiet w wybranej grupie wieku. Przypomnijmy, że okresem, na podstawie którego dokonano estymacji parametrów, są lata 1958–2000, natomiast przedział 2001–2014 traktowany jest tutaj jako okres prognozy *ex post*.



Rys. 6.25. Empiryczne i odtworzone logarytmy współczynników zgonów w grupie wieku $x = 25$ lat wraz z pasmem rozmytości

Źródło: opracowanie własne

Wartości odtworzone wyznaczone zostały z formuły $a_x + b_x k_t$. Stanowią one jednocześnie wartości centralne symetrycznych liczb rozmytych, reprezentujących logarytmy współczynników zgonów, oszacowane na podstawie modelu. Dodatkowo, na rysunku 6.25 wykreślone zostały pasma rozmytości dla wartości odtworzonych, ograniczone krzywymi o równaniach

$$f_{1x}(t) = a_x + b_x k_t - (s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}), \quad (6.4.2)$$

$$f_{2x}(t) = a_x + b_x k_t + (s_{A_x} - s_{B_x} s_{K_t}). \quad (6.4.3)$$

W celu wyznaczenia k_t oraz s_{K_t} dla okresu prognozy przyjęto model błędzenia przypadkowego z dryfem dla obu wymienionych wskaźników (przez analogię do modelu (1.8.5)). Zauważymy, że wyznaczone obszary rozmytości zawierają w sobie wartości odtworzone oraz większość obserwacji rzeczywistych, biorąc w szczególności pod uwagę okres prognozy.

6.5. Wyniki estymacji modelu kwaternionowego

Wyniki estymacji modelu kwaternionowego CNMM (5.4.1)–(5.4.3) zaprezentowane zostały dalej w podobnej konwencji, jak w paragrafie 6.4, tj. za pomocą wykresów ocen parametrów a_x , b_x , k_t oraz s_{A_x} , s_{B_x} , s_{K_t} , natomiast wartości miar błędów MSE , MAD dla prognoz *ex post* przedstawione zostały w formie tabelarycznej.

Algebra rozważana w modelu kwaternionowym utworzona została z algebry skierowanych liczb rozmytych, poprzez przedstawienie skierowanych liczb rozmytych $\vec{A} = (f, g)$ za pomocą par funkcji zespolonych

$$\tilde{A}(u) = (f_A(u), g_A(u)), \quad u \in [0, 1], \quad (6.5.1)$$

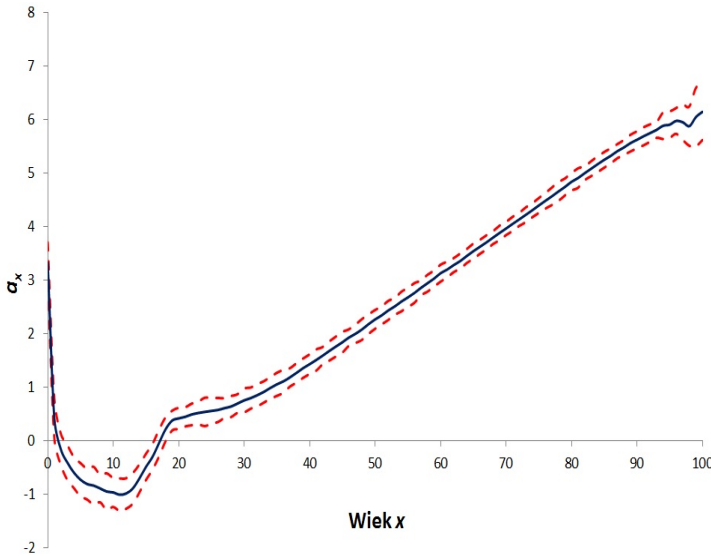
gdzie

$$f_A(u) = a - i(1 - u)s_A, \quad g_A(u) = a + i(1 - u)s_A \quad (6.5.2)$$

oraz poprzez przyjęcie definicji mnożenia właściwej dla kwaternionów (por. definicja B.6, aksjomat (iii), dodatek B).

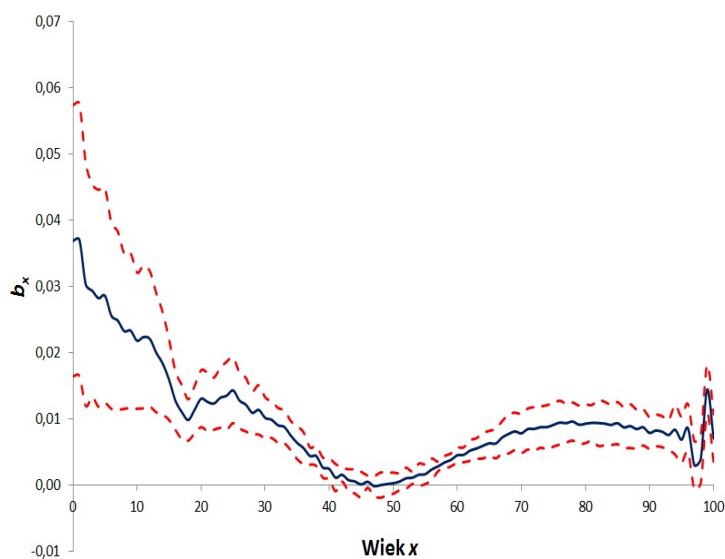
W algebrze tej jest spełnione założenie twierdzenia Gelfanda–Mazura, zatem jest ona izometrycznie izomorficzna z algebrą liczb zespolonych.

Współczynniki $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ w modelu CNMM będziemy traktować podobnie, jak w modelu rozmytym MFMM, to jest jako miary rozmytości odpowiednich ocen a_x, b_x, k_t . Te ostatnie interpretujemy analogicznie, jak w standardowym modelu Lee–Cartera (por. paragraf 6.2). Na rysunkach 6.26–6.31 wartości $s_{A_x}, s_{B_x}, s_{K_t}$ użyte zostały do zaznaczenia obszarów rozmytości.



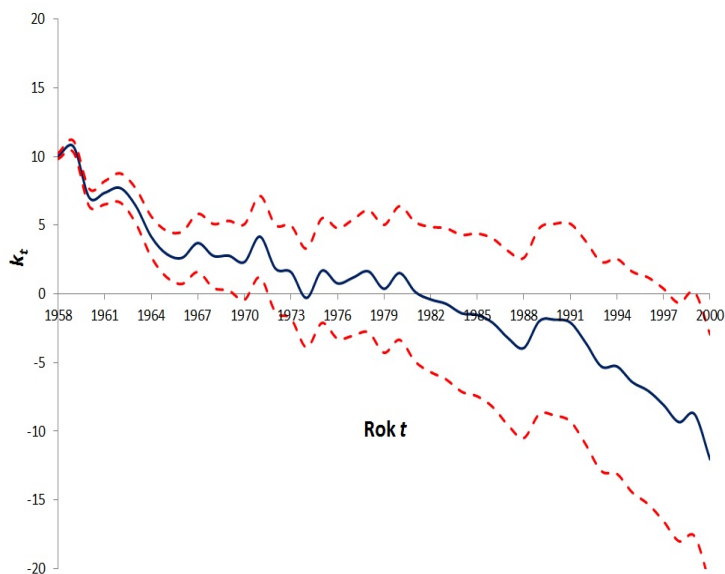
Rys. 6.26. Oszacowania parametrów a_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



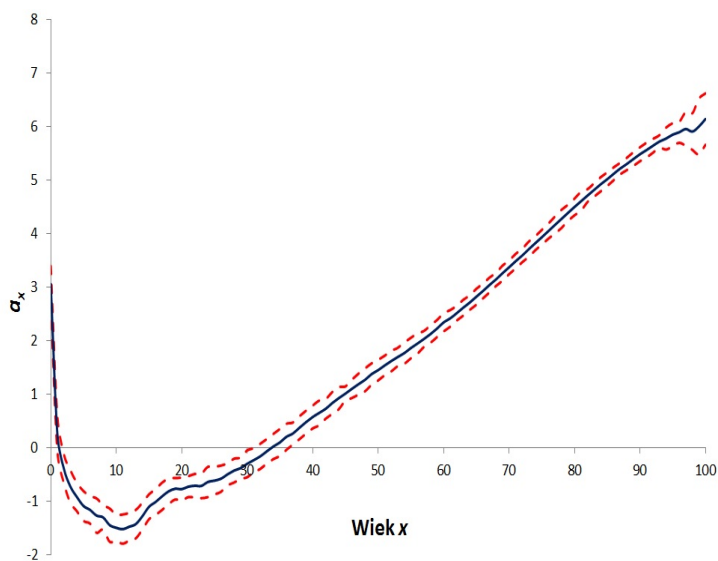
Rys. 6.27. Oszacowania parametrów b_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



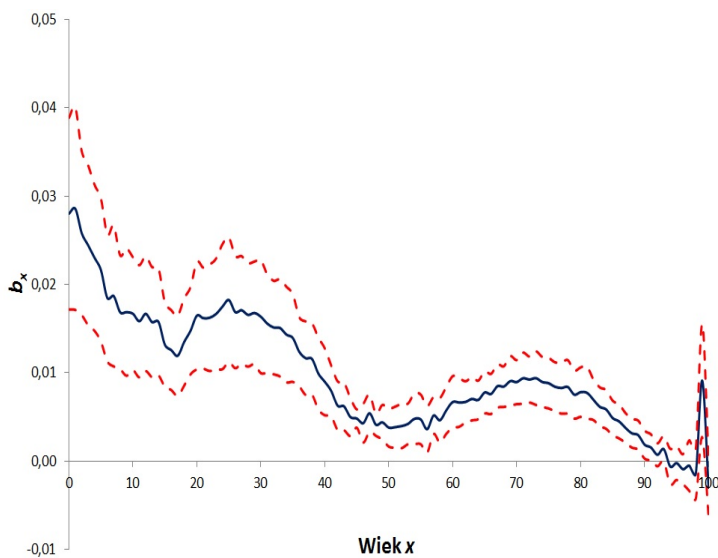
Rys. 6.28. Oszacowania parametrów k_t , $t = 1958, \dots, 2000$ oraz ich obszar rozmytości w modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) (mężczyźni)

Źródło: opracowanie własne



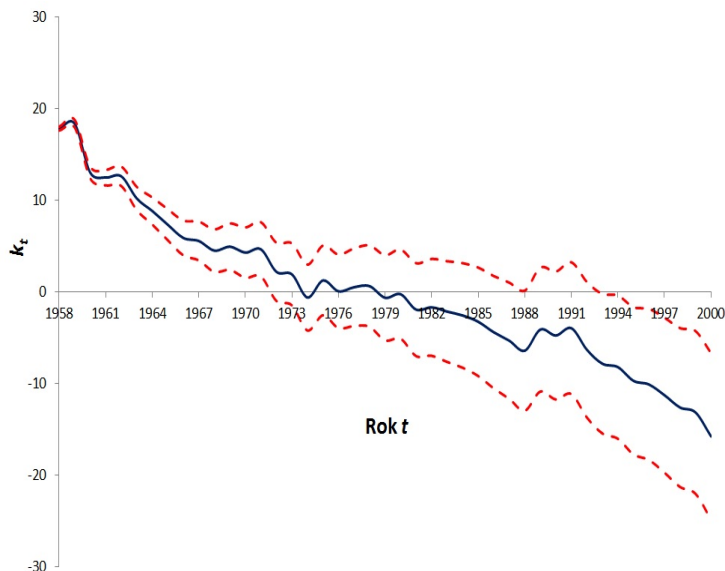
Rys. 6.29. Oszacowania parametrów a_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.30. Oszacowania parametrów b_x , $x = 0, 1, \dots, 100$ oraz ich obszar rozmytości w modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne



Rys. 6.31. Oszacowania parametrów k_t , $t = 1958, \dots, 2000$ oraz ich obszar rozmytości w modelu CNMM (5.4.1)–(5.4.3) (kobiety)

Źródło: opracowanie własne

Miary MSE i MAD dla modelu CNMM, których wartości zestawione zostały w tablicach 6.8 i 6.9 z miarami dla modelu LC zdefiniowane są przez analogię do (6.2.1)

$$MSE_t^{(CNMM)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} [\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)]^2,$$

$$MAD_t^{(CNMM)} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} |\ln m_{x,t} - (a_x + b_x k_t)|,$$

gdzie a_x, b_x, k_t oznaczają parametry kwaternionów $\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{K}_t$, oszacowane na podstawie modelu (5.4.1)–(5.4.3) z wykorzystaniem metody optymalizacji nieliniowej (rozdział 5, paragraf 5.4.1).

Opierając się na wynikach zawartych w tablicach 6.8, 6.9 można stwierdzić, iż model kwaternionowy wykazuje nieco gorsze własności prognozytyczne niż model LC. Jednakże, podobnie jak model rozmyty MFMM, dostarcza dodatkowo ocen rozmytości dla szacowanych parametrów oraz pozwala na wyznaczenie obszarów rozmytości (niepewności) dla prognozowanych współczynników zgonów.

Tablica 6.8. Porównanie *ex post* miar *MSE*
dla modeli LC i CNMM

Rok	Mężczyźni		Kobiety	
	LC	CNMM	LC	CNMM
2001	0,197	0,214	0,098	0,225
2002	0,204	0,207	0,122	0,240
2003	0,215	0,231	0,122	0,273
2004	0,223	0,250	0,132	0,289
2005	0,230	0,263	0,146	0,269
2006	0,232	0,247	0,152	0,282
2007	0,238	0,263	0,172	0,299
2008	0,257	0,273	0,174	0,314
2009	0,281	0,304	0,191	0,296
2010	0,330	0,355	0,190	0,376
2011	0,341	0,342	0,218	0,381
2012	0,373	0,368	0,215	0,415
2013	0,406	0,396	0,246	0,413
2014	0,469	0,476	0,273	0,424

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 6.9. Porównanie *ex post* miar *MAD*
dla modeli LC i CNMM

Rok	Mężczyźni		Kobiety	
	LC	CNMM	LC	CNMM
2001	0,182	0,159	0,083	0,199
2002	0,185	0,158	0,107	0,215
2003	0,195	0,173	0,109	0,238
2004	0,206	0,185	0,117	0,255
2005	0,214	0,192	0,129	0,247
2006	0,214	0,187	0,130	0,257
2007	0,219	0,191	0,152	0,264
2008	0,234	0,205	0,156	0,282
2009	0,250	0,228	0,170	0,269
2010	0,302	0,277	0,167	0,353
2011	0,307	0,283	0,191	0,351
2012	0,335	0,308	0,185	0,379
2013	0,359	0,333	0,221	0,377
2014	0,430	0,402	0,245	0,397

Źródło: opracowanie własne.

6.6. Uwagi końcowe

Podsumowując rezultaty estymacji oraz ewaluacji szeregu proponowanych modeli umieralności, można wskazać ich mocne i słabe strony. W przypadku hybrydowego modelu dynamicznego Lee–Cartera EHLC

mocną stroną są jego własności prognostyczne. Na podstawie tego modelu możemy uzyskać prognozy umieralności obarczone mniejszym średnim błędem niż w przypadku popularnego modelu Lee–Cartera, na co wskazują wyraźnie mniejsze błędy średniokwadratowe i średnie błędy absolutne. Budowane prognozy mają jednak charakter prognoz punktowych. Wskazane byłoby w kolejnym kroku opracowanie obszarów ufności dla prognozowanych wielkości, co wymagałoby przyjęcia pewnych założeń o rozkładzie prawdopodobieństwa obserwowanych zmiennych oraz zaangażowania zaawansowanego aparatu matematycznego.

W przypadku modeli opartych na liczbach rozmytych oraz funkcjach zespolonych własności prognostyczne są zbliżone do oferowanych przez standardowy model Lee–Cartera. Przewaga wymienionych modeli polega natomiast na możliwości wyznaczenia obszarów rozmytości dla szacowanych parametrów, a w konsekwencji także dla generowanych na tej podstawie prognoz współczynników zgonów. Co więcej, wyznaczenie obszarów rozmytości w przypadku tych modeli nie wymaga stosowania zaawansowanej metodologii.

Otrzymane rezultaty skłaniają autorów do kontynuowania prac zmierzających do opracowania rodziny modeli, łączących w sobie własności hybrydowych modeli dynamicznych oraz modeli rozmytych i zespolonych. Będą one przedmiotem dociekań w kolejnych publikacjach poświęconych modelowaniu umieralności.

Dodatek A

Elementy analizy procesów stochastycznych i równania stochastyczne

A.1. Podstawowe definicje procesów stochastycznych

W niniejszym dodatku przypomnimy niezbędne informacje o procesach stochastycznych. Pomijamy przy tym wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, które Czytelnik z łatwością znajdzie w podręcznikach akademickich. Przy opracowywaniu tego dodatku korzystano z monografii [68], [98], [99], [100].

Teoria procesów stochastycznych powstała jako uogólnienie koncepcji zmiennych losowych. W przypadku zmiennej losowej każdemu zdarzeniu elementarnemu przypisana jest liczba. Jednak w wielu procesach rzeczywistych (fizycznych, ekonomicznych, biologicznych lub chemicznych) model taki jest niewystarczający, najczęściej każdemu zdarzeniu elementarnemu odpowiada bowiem nie liczba, lecz funkcja, np. czasu, lub funkcja określona na jakimś zbiorze parametrów. Prowadzi to do definicji procesu stochastycznego.

Definicja A.1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$. Rodzinę $X = \{\xi(t, \omega)\}, t \in \mathbf{R}^+$, nazywamy (*rzeczywistym*) *procesem stochastycznym z czasem ciągłym*. W przypadku, gdy parametr czasowy t należy do zbioru liczb naturalnych $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, rodzinę $X = \{\xi(t, \omega)\}, t \in \mathbf{N}, \omega \in \Omega$ nazywamy *ciągłem losowym* lub *procesem stochastycznym z czasem dyskretnym*. W podobny sposób definiuje się proces stochastyczny o wartościach zespolonych.

Przy ustalonym $\omega \in \Omega$ funkcję czasu $\xi(t, \cdot)$ nazywamy *trajektorią* lub *realizacją* odpowiadającą zdarzeniu elementarnemu ω .

Będziemy używali notacji $\xi(t, \omega)$ dla procesów z czasem ciągłym oraz $\xi_t(\omega)$ dla procesów z czasem dyskretnym. Niekiedy, dla wygody zapisu, będziemy opuszczać symbol zdarzenia elementarnego ω w oznaczeniu pro-

cesów, to znaczy $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, gdy $t \in \mathbf{R}^+$ lub $\xi_t = \xi(t, \omega)$, gdy $t \in \mathbf{N}$, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Procesy stochastyczne będą oznaczane także literami x_1, x_2, y_1, y_2 .

Dla ustalonych chwil $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ proces stochastyczny $\xi(t)$ staje się skończoną liczbą zmiennych losowych $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$, które charakteryzuje łączny rozkład prawdopodobieństwa

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\} \quad (\text{A.1.1})$$

lub łączna gęstość prawdopodobieństwa (dla procesów ciągłych)

$$g(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n)$$

albo łączna funkcja charakterystyczna

$$\Phi(\Theta_1, t_1, \dots, \Theta_n, t_n) = E \exp \left\{ \sum_{j=1}^n i \Theta_j \xi(t_j) \right\} \quad (\text{A.1.2})$$

Naturalnym uogólnieniem łącznej funkcji charakterystycznej jest funkcjonal charakterystyczny zdefiniowany następująco

$$\Phi(\Theta(t)) = E \exp i \int_{R^+} \Theta(t) \xi(t) dt \quad , \quad (\text{A.1.3})$$

gdzie funkcja $\Theta(t)$ należy do klasy funkcji, dla których operacja całkowania pod eksponentem jest dobrze określona.

Przejście od wzoru (A.1.3) do (A.1.2) otrzymuje się przez podstawienie

$$\Theta(t) = \sum_j \Theta_j \delta(t - t_j), \quad (\text{A.1.4})$$

gdzie $\delta(t)$ jest dystrybucją Diraca.

Podobnie jak dla zmiennych losowych, również dla procesów stochastycznych momenty i kumulanty wyznacza się, różniczkując odpowiedni funkcjonal charakterystyczny

$$\begin{aligned} \Phi(\Theta(t)) &= \Phi(\Theta(t)) = 1 + i \sum_{j=1}^n \Theta_j(t) E[x_j(t)] + \\ &+ \frac{i^2}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Theta_j(t) \Theta_k(t) E[x_j(t) x_k(t)] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

Przy wykorzystaniu łącznej gęstości $g(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n)$ momenty mieszane wyższych rzędów mają postać

$$E[x_1^{p_1}(t_1) \dots x_n^{p_n}(t_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1^{p_1}(t_1) \dots x_n^{p_n}(t_n)] g(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Korzystając z różnych definicji zbieżności zmiennych losowych można podać kilka podstawowych definicji ciągłości procesu stochastycznego.

Definicja A.2. Proces stochastyczny $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$, jest nazywany *ciągłym prawie wszędzie*, jeśli

$$P\{\omega : \lim_{t \rightarrow s} \xi(t, \omega) = \xi(s, \omega) = 0\} = 1. \quad (\text{A.1.6})$$

Definicja A.3. Proces stochastyczny $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$, jest nazywany *ciągłym według prawdopodobieństwa*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{t \rightarrow s} P\{|\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)| > \varepsilon\} = 0. \quad (\text{A.1.7})$$

A.1.1. Procesy drugiego rzędu

Szczególnie ważna w zastosowaniach jest klasa procesów drugiego rzędu o wartościach zespolonych, to znaczy posiadających ograniczone drugie momenty

$$E[|x(t, \omega)|^2] < \infty, \quad t \in \mathbf{R}^+. \quad (\text{A.1.8})$$

Wielkościami charakteryzującymi procesy drugiego rzędu są: funkcja autokorelacji i autokowariancji, zdefiniowane odpowiednio

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1) \overline{x(t_2)}], \quad (\text{A.1.9})$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - E[x(t_1)]) \overline{(x(t_2) - E[x(t_2)])}], \quad (\text{A.1.10})$$

zwane czasami w skrócie odpowiednio funkcjami korelacji i kowariancji i zapisywane $R_x(t_1, t_2)$ oraz $K_x(t_1, t_2)$ lub $R(t_1, t_2)$ oraz $K(t_1, t_2)$.

W zapisie (A.1.9) oraz (A.1.10) górna kreska oznacza zespolone sprzężenie. Dla $t_1 = t_2 = t$ mamy

$$K_{xx}(t, t) = E[(x(t) - E[x(t)])^2] = \sigma_x^2(t), \quad (\text{A.1.11})$$

gdzie $\sigma_x(t)$ jest odchyleniem standardowym procesu $x(t)$.

Dla dwóch różnych procesów $x(t), y(t)$ wprowadza się *funkcje korelacji wzajemnej* i *funkcje kowariancji wzajemnej*, zdefiniowane odpowiednio

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1) \overline{y(t_2)}], \quad (\text{A.1.12})$$

$$K_{xy}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - E[x(t_1)]) \overline{(y(t_2) - E[y(t_2)])}], \quad (\text{A.1.13})$$

a dla procesu wektorowego $x(t)$ o wartościach zespolonych *macierzowe funkcje korelacji* oraz *macierzowe funkcje kowariancji* są zdefiniowane następująco

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}^*(t_2)], \quad (\text{A.1.14})$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E[(\mathbf{x}(t_1) - E[\mathbf{x}(t_1)]) (\mathbf{x}(t_2) - E[\mathbf{x}(t_2)])^*], \quad (\text{A.1.15})$$

gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie i transpozycję.

Podobnie definiuje się, odpowiednio *macierzową funkcję korelacji wzajemnej* oraz *macierzową funkcję kowariancji wzajemnej*

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1) \mathbf{y}^*(t_2)], \quad (\text{A.1.16})$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = E[(\mathbf{x}(t_1) - E[\mathbf{x}(t_1)]) (\mathbf{y}(t_2) - E[\mathbf{y}(t_2)])^*]. \quad (\text{A.1.17})$$

Dla procesów drugiego rzędu definiuje się ciągłość w sensie średniokwadratowym.

Definicja A.4. Proces stochastyczny $x(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$ drugiego rzędu jest nazywany *ciągłym w sensie średniokwadratowym* w punkcie t , jeśli

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} l.i.m (x(s+\Delta t, \omega) - x(s, \omega)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E[|x(s+\Delta t, \omega) - x(s, \omega)|^2] = 0, \quad (\text{A.1.18})$$

gdzie *l.i.m* oznacza granicę w sensie średniokwadratowym.

Twierdzenie A.1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym ciągłości w sensie średniokwadratowym procesu $x(t)$ jest istnienie funkcji autokorelacji $R_x(t_1, t_2)$, ciągłej na zbiorze $\{(t_1, t_2) : t_1 = t_2\}$.

W przypadku procesów p -tego rzędu definicja ciągłości jest następująca.

Definicja A.5. Proces stochastyczny $x(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$ p -tego rzędu, jest nazywany *ciągłym w punkcie s w sensie p -tego momentu*, $0 < p < \infty$, jeśli

$$\lim_{t \rightarrow s} E[|x(t, \omega) - x(s, \omega)|^p] = 0. \quad (\text{A.1.19})$$

W szczególnym przypadku, tj. dla $p = 1$, proces jest nazywany *ciągłym w sensie średnim*.

A.1.2. Procesy stacjonarne

Szeroką klasą procesów stochastycznych, których własności probabilistyczne nie zależą od bieżącej wartości zmiennej t , ale od różnicy argumentów $t - s$, są tzw. procesy stacjonarne.

Definicja A.6. Proces stochastyczny $x(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$ jest nazywany *slabo stacjonarnym* lub *stacjonarnym w szerokim sensie*, jeśli dla dowolnego $\Delta \in \mathbf{R}$ i dowolnych $t, s \in \mathbf{R}^+$ zachodzą następujące zależności

$$E[|x(t)|^2] < \infty,$$

$$E[x(t)] = E[x(t + \Delta, \omega)], \quad (\text{A.1.20})$$

$$E[x(t + \Delta) \overline{x(s + \Delta)}] = E[x(t) \overline{x(s)}],$$

tzn. jeśli pierwsze i drugie momenty nie zmieniają się po przesunięciu zmiennej t . Dla uproszczenia będziemy często pomijać słowo „slabo”, co nie powinno prowadzić do nieporozumień.

Bezpośrednim wnioskiem płynącym z tej definicji jest fakt, że wartość średnia i wariancja są stałe w czasie, a funkcje korelacji i kowariancji zależą jedynie od różnicy argumentów $t_2 - t_1$, tzn.

$$E[x(t)] = m_x = \text{const}, \quad (\text{A.1.21})$$

$$E[(x(t) - E[x(t)])^2] = \sigma_x^2 = \text{const}, \quad (\text{A.1.22})$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau), \quad (\text{A.1.23})$$

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau), \quad (\text{A.1.24})$$

gdzie $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$.

A.1.3. Procesy gaussowskie

Bardzo ważną klasą procesów stochastycznych, z uwagi na swe własności aplikacyjne, są procesy gaussowskie (normalne). W literaturze istnieje kilka różnych definicji procesu gaussowskiego. My wyróżnimy następującą definicję.

Definicja A.7. Wektorowy proces stochastyczny $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^r$, $t \in \mathbf{R}^+$ nazywamy *gaussowskim* (lub *normalnym*), jeśli dla dowolnego naturalnego $n \in \mathbf{N}$ i dowolnego podzbioru $\{t_1, \dots, t_n\}$, $t_i \in \mathbf{R}^+$, $n \geq 1$ wektorowe

zmienne losowe $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ mają łączny rozkład gaussowski, to znaczy ich funkcja charakterystyczna dla dowolnych wektorów rzeczywistych $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ jest następująca

$$\begin{aligned} \Phi(\Theta_1, t_1, \dots, \Theta_n, t_n) &= \mathbb{E} \exp \sum_{j=1}^n i \Theta_j^T \mathbf{x}(t_j) = \\ &= \exp \sum_{j=1}^n i \Theta_j^T \mathbf{m}(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i \Theta_j^T \mathbf{K}(t_j, t_k) \Theta_k, \end{aligned} \quad (\text{A.1.25})$$

gdzie $\mathbf{m}(t)$ i $\mathbf{K}(t_1, t_2)$ są odpowiednio wektorem wartości średnich (średnią) i macierzą kowariancji wektorowego procesu $\mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$, $\Theta = [\Theta_1^T, \dots, \Theta_n^T]^T$, $\mathbf{m} = [\mathbf{m}_1^T, \dots, \mathbf{m}_n^T]^T$, $\mathbf{K} = [\mathbf{K}(t_1, t_2)]$.

Jeśli macierz kowariancji $\mathbf{K}(t_i, t_j)$, $i, j = 1, \dots, n$ jest niesingularna, to łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych wektorowych $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ ma postać

$$g_G(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = [(2\pi)^{n^2} |\mathbf{K}|]^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{m}_x)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{m}_x), \quad (\text{A.1.26})$$

gdzie $\mathbf{u} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T]^T$, $\mathbf{m}_x = [\mathbf{m}_1^T, \dots, \mathbf{m}_n^T]^T$, natomiast $|\mathbf{K}|$ jest wyznacznikiem blokowej macierzy kowariancji o wymiarach $n^2 \times n^2$. Ma ona postać $\mathbf{K} = [\mathbf{K}(t_i, t_j)]$, $i, j = 1, \dots, n$.

W szczególnym przypadku, gdy elementy macierzy są jednowymiarowe, tzn. $[\mathbf{K}(t_i, t_j)] = K(t_i, t_j)$, macierz kowariancji $\mathbf{K}$ jest postaci

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.27})$$

A.1.4. Procesy Markowa

Zajmiemy się teraz szeroką klasą procesów stochastycznych, w których „przyszłość” nie zależy od „przeszłości” jeśli znana jest „teraźniejszość”. Podamy najpierw ogólną definicję takiego procesu.

Definicja A.8. Wektorowy proces stochastyczny $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$, r -wymiarowy nazywa się *procesem Markowa*, jeśli dla $n \in \mathbf{N}$ i dla dowolnych

wartości parametru $t_m \in \mathbf{R}^+$, $m = 1, \dots, n$, gdzie $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ oraz dla dowolnych wektorów rzeczywistych $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^r$ zachodzi następująca zależność

$$\begin{aligned} P\{\xi(t_n) < \mathbf{x}_n \mid \xi(t_{n-1}) = \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \xi(t_1) = \mathbf{x}_1\} = \\ (A.1.28) \\ = P\{\xi(t_n) < \mathbf{x}_n \mid \xi(t_{n-1}) = \mathbf{x}_{n-1}\}, \end{aligned}$$

to znaczy rozkład warunkowy $\xi(t_n)$ dla danych wartości $\xi(t_0), \xi(t_1), \dots, \xi(t_{n-1})$ zależy tylko od wartości procesu w chwili poprzedniej, nie zależy natomiast od wszystkich wartości jakie przyjmował proces $\xi(t)$ do chwili t_{n-1} , tzn. zależy jedynie od $\xi(t_{n-1})$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\mathcal{P}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{B}) = P\{\xi(t) \in \mathbf{B} \mid \xi(s) = \mathbf{x}\}, \quad s \leq t, \quad (A.1.29)$$

$$F(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = P\{\xi(t) < \mathbf{y} \mid \xi(s) = \mathbf{x}\}, \quad (A.1.30)$$

gdzie $\mathbf{B} \in \mathcal{B}^r$, $\mathcal{B}^r$ jest σ -ciałem zbiorów borelowskich w $\mathbf{R}^r$.

Funkcje $\mathcal{P}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{B})$ i $F(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ są nazywane *funkcjami prawdopodobieństwa przejścia* lub krócej *funkcjami przejścia* związanymi z procesem Markowa $\xi(t)$.

W analizie procesów Markowa często korzysta się z własności homogeniczności (jednorodności).

Definicja A.9. Proces Markowa $\xi(t), t \in \mathbf{R}^+$ nazywa się *homogenicznym* (ze względu na czas), jeśli dla dowolnych $s, t \in \mathbf{R}^+$, $s < t$, funkcja przejścia zależy tylko od różnicy argumentów czasowych $t - s = \tau$, to znaczy

$$\mathcal{P}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{B}) = \mathcal{P}(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{B}), \quad (A.1.31)$$

$$F(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}). \quad (A.1.32)$$

Wśród procesów Markowa ważną klasę stanowią procesy z ciągłym czasem oraz ciągłą przestrzenią stanów.

Definicja A.10. Wektorowy proces Markowa $\xi(t), t \in \mathbf{R}^+$ o wartościach w $\mathbf{R}^r$ jest nazywany *r-wymiarowym procesem dyfuzji*, jeśli jego funkcja przejścia $F(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ dla każdego $t \in \mathbf{R}^+$ i każdego $\varepsilon > 0$ spełnia następujące warunki

(i)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} d_{\mathbf{y}} F(t, \mathbf{x}; t + \Delta t, \mathbf{y}) = 0, \quad (A.1.33)$$

$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \varepsilon$

(ii) istnieje pewna funkcja wektorowa $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, taka że

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d_{\mathbf{y}} F(t, \mathbf{x}; t + \Delta t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (A.1.34)$$

$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon$

(iii) istnieje pewna funkcja wektorowa $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, taka że

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T d_{\mathbf{y}} F(t, \mathbf{x}; t + \Delta t, \mathbf{y}) = \\ = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) > 0, \end{aligned} \quad (A.1.35)$$

$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon$

gdzie $|\cdot|$ jest normą Euklidesa w $\mathbf{R}^r$ oraz zbieżność w warunkach (A.1.34), (A.1.35) jest jednostajna ze względu na $\mathbf{x}$. Z kolei wyrażenie $d_{\mathbf{y}} F(t, \mathbf{x}; t + \Delta t, \mathbf{y})$ jest różniczką funkcji F ze względu na $\mathbf{y}$.

Funkcje $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ nazywa się odpowiednio *wektorem dryftu* (*unoszenia*) oraz *macierzą dyfuzji*.

Dla procesu dyfuzyjnego istnieje możliwość wyznaczenia gęstości funkcji przejścia na podstawie znajomości $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ oraz $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$.

A.1.5. Procesy o przyrostach niezależnych

Szczególnie ważną klasą procesów Markowa są procesy o przyrostach niezależnych.

Definicja A.11. Proces stochastyczny $\xi(t), t \in \mathbf{R}^+$, jest nazywany *procesem o przyrostach niezależnych*, jeśli dla dowolnych $t_i \in \mathbf{R}^+$, takich że $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, zmienne losowe będące przyrostami procesu $\xi(t)$, tzn. $\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ są niezależne.

Definicja A.12. Proces stochastyczny $\xi(t), t \geq 0, \xi(0) = 0$ określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest nazywany *procesem o przyrostach niezależnych od przeszłości*, jeśli dla dowolnych $t, s \in \mathbf{R}^+, 0 \leq s \leq t < \infty$, zmienne losowe będące przyrostami procesu $\xi(t)$, to znaczy $\xi(t) - \xi(s)$, są niezależne od $\mathcal{F}$.

Definicja A.13. Proces stochastyczny $\xi(t), t \in \mathbf{R}^+$ o przyrostach niezależnych jest nazywany *procesem o stacjonarnych przyrostach niezależnych*, jeśli różnice $\xi(t_1) - \xi(t_0), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ zależą tylko od różnic odpowiednio $t_1 - t_0, \dots, t_n - t_{n-1}$.

Ważnymi procesami o przyrostach niezależnych są procesy Wienera, Poissona oraz Levy'ego. Szczegółowo omówimy proces Wienera.

Definicja A.14. Proces stochastyczny $\xi(t, \omega)$, $t \in \mathbf{R}^+$, zadany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest nazywany *procesem Wienera* lub *ruchem Browna*, jeśli

- (i) $P\{\xi(0, \omega) = 0\} = 1$,
- (ii) $\xi(t, \omega)$ jest procesem o stacjonarnych przyrostach niezależnych od przeszłości,
- (iii) przyrosty $\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)$ mają rozkład Gaussa taki, że

$$E[\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)] = 0, \quad (\text{A.1.36})$$

$$E[(\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega))^2] = \sigma^2 |t - s|, \quad \sigma^2 = \text{const} > 0, \quad (\text{A.1.37})$$

- (iv) dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ realizacje $\xi(t, \omega)$ są ciągłe ze względu na $t \in \mathbf{R}^+$.

Niektórzy autorzy definiują proces Wienera wykorzystując własności (i)–(iii) i udowadniają, że tak zdefiniowany proces Wienera $\xi(t, \omega)$ ma modyfikację, której realizacje są prawie wszędzie ciągłe.

W przypadku, gdy $\sigma^2 = 1$ proces $\xi(t, \omega)$ jest nazywany *standardowym procesem Wienera*. Istnienie takiego procesu wynika z konstrukcji podanej przez Lipcera i Sziriajewa [68].

Niech $\eta_1, \eta_2, \dots$ będzie ciągiem gaussowskich zmiennych losowych o wartościach średnich równych zeru i jednostkowych wariancjach oraz niech $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, t \in [0, T]$, będzie dowolnym ciągiem zupełnym i ortogonalnym w $L^2[0, T]$. Wówczas zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie A.2. Dla każdego $t \in [0, T]$ szereg

$$\xi(t, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(\omega) \int_0^t \phi_j(s) ds, \quad (\text{A.1.38})$$

jest zbieżny prawie wszędzie i określa proces Wienera na przedziale $[0, T]$.

Z definicji standardowego procesu Wienera wynikają następujące jego własności

$$E[\xi(t)] = 0, \quad (\text{A.1.39})$$

$$K(s, t) = E[\xi(s)\xi(t)] = \min(s, t), \quad (\text{A.1.40})$$

$$P\{\xi(t) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x \exp -\frac{y^2}{2t} dy, \quad (\text{A.1.41})$$

$$E[|\xi(t)|] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \quad (\text{A.1.42})$$

$$\begin{aligned} E[(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^{2p}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{2p} \exp - \frac{z^2}{2\Delta t} dz = \\ &= (2n - 1)!! (\Delta t)^p. \end{aligned} \quad (\text{A.1.43})$$

Z definicji wynika, że prawie wszystkie realizacje procesu Wienera są ciągłe.

Twierdzenie A.3. Mimo że prawie wszystkie realizacje procesu Wienera są ciągłe, to nie są jednak różniczkowalne dla wszystkich $t \geq 0$ i na każdym skończonym przedziale mają wahanie nieskończone (można je interpretować jako „szybko zmienne funkcje piłowe”).

Definicja A.15. Proces stochastyczny $\xi(t)$ jest nazywany *r-wymiarowym procesem Wienera* $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_r(t)]^T$, jeśli każda jego składowa $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, r$ jest skalarnym procesem Wienera i wszystkie $\xi_i(t)$ są wzajemnie niezależnymi procesami.

A.1.6. Biały szum

Fundamentalnym narzędziem matematycznym w analizie stochastycznych układów dynamicznych jest abstrakcyjny proces stochastyczny (nie-realizowalny fizycznie), zwany białym szumem. W literaturze, zwłaszcza technicznej, można znaleźć kilka definicji tego pojęcia. Podamy definicję autorstwa Itô i Gelfanda, zaczerpniętą z książki Sobczyka [98], opartą na teorii funkcji uogólnionych (dystrybucji) stochastycznych.

Niech $D(T)$ będzie przestrzenią funkcji próbnych, tzn. wszystkich nieskończenie wiele razy różniczkowalnych funkcji $\phi : T \rightarrow R^1$ znikających tożsamościowo na zewnątrz skończonego przedziału domkniętego. Dla tej przestrzeni przyjmuje się topologię, jak w zwykłych przestrzeniach dystrybucyjnych Schwartza. Oznacza to, że $D(T)$ jest topologiczną przestrzenią wektorową. Niech H będzie przestrzenią Hilberta wszystkich P-równoważnych zmiennych losowych zdefiniowanych na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o skończonym drugim momencie.

Definicja A.16. Ciągłe, liniowe odwzorowanie $\Phi : D(T) \rightarrow H$ jest nazywane *uogólnionym procesem stochastycznym na zbiorze T*. Wartość uogólnionego procesu stochastycznego Φ w ϕ jest oznaczana przez $\{\phi, \Phi\}$ lub $\Phi(\phi)$.

Zaletą uogólnionego procesu stochastycznego jest zawsze istnienie jego pochodnej, która jest również uogólnionym procesem stochastycznym. Ilustruje to następująca definicja.

Definicja A.17. Pochodna $\dot{\Phi}$ ze względu na t uogólnionego procesu Φ (uogólniona pochodna) w przestrzeni $D(T)$ jest określona zależnością

$$\{\phi, \dot{\Phi}\} = \left\{ \frac{d\phi}{dt}, \Phi \right\} \quad \text{dla wszystkich } \phi \in D(T). \quad (\text{A.1.44})$$

Wykorzystując definicję uogólnionej pochodnej do procesów Wienera, złożonego procesu Poissona oraz α -stabilnego procesu Levy'ego, można otrzymać nowe, uogólnione procesy stochastyczne.

Gaussowski biały szum

Definicja A.18. Uogólniona pochodna procesu Wienera $w(t)$, $t \in [0, \infty)$ oznaczana przez $\eta_w(t) = \dot{w}(t) = \frac{dw(t)}{dt}$, to znaczy

$$\{\phi, \eta\} = \{\phi, \dot{\xi}\} = -\left\{ \frac{d\phi}{dt}, \xi \right\} \quad \text{dla wszystkich } \phi \in D(T), \quad (\text{A.1.45})$$

jest nazywana *gaussowskim białym szumem*.

Równość (A.1.45) można również zapisać w postaci

$$d\xi(t) = \eta(t)dt. \quad (\text{A.1.46})$$

Nie wchodząc w szczegóły, można wykazać, że dla każdego $\phi \in D(T)$, całka zmiennej $\{\phi, \eta\}$ jest zmienną losową gaussowską oraz dla skończonej liczby funkcji $\phi_1, \dots, \phi_n \in D(T)$ zmienne losowe $\{\phi_i, \eta\}$, $1 \leq i \leq n$ mają łączny rozkład gaussowski. Ponadto, wartość oczekiwana dla $\eta(t)$ wynosi

$$E[\eta(t)] = 0 \quad (\text{A.1.47})$$

i funkcja kowariancji jest dystrybucją Diraca

$$K_{\eta\eta}(t_1, t_2) = c\delta(t_2 - t_1) = c\delta(\tau), \quad c = \text{const. } c > 0, \quad (\text{A.1.48})$$

Z ostatniej równości wynika bezpośrednio, że wariancja białego szumu gaussowskiego jest równa nieskończoności $K_{\eta\eta}(t, t) = \delta(0) = \infty$, a funkcja gęstości widmowej mocy procesu jest funkcją stałą równą stałej c

$$S_{\xi\xi}(\lambda) = c. \quad (\text{A.1.49})$$

Własność (A.1.48) potwierdza „nierealizowalność fizyczną” takiego procesu, druga natomiast własność (A.1.49) wskazuje na pochodzenie nazwy „biały szum”, czyli jego analogię do „światła białego”, w którym występują wszystkie częstotliwości fal elektromagnetycznych (barwy).

A.2. Rachunek różniczkowy i całkowy procesów stochastycznych

A.2.1. Całkowanie oraz różniczkowanie w sensie średniokwadratowym

Przy omawianiu procesów drugiego rzędu podaliśmy definicję ciągłości procesu stochastycznego w sensie średniokwadratowym. W podobny sposób definiuje się różniczkowalność i całkowalność w sensie średniokwadratowym.

Definicja A.19 (różniczkowanie w sensie średniokwadratowym). *Pochodna w sensie średniokwadratowym* procesu stochastycznego $x(t)$ jest zdefiniowana przez następującą równość

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = l.i.m. \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.2.1})$$

Twierdzenie A.4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym różniczkowalności (istnienia pochodnej) w sensie średniokwadratowym procesu $x(t)$ jest istnienie drugiej pochodnej funkcji autokorelacji $\frac{\partial^2 R_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ ograniczonej i ciągłej na zbiorze $\{(t_1, t_2) : t_1 = t_2\}$.

Definicja A.20 (całkowanie w sensie średniokwadratowym). Niech $f(t)$ będzie funkcją zespoloną na przedziale $[a, b]$ oraz niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$, to znaczy

$$T_n = \{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = b\}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) = 0.$$

Całkę w sensie średniokwadratowym na przedziale $[a, b]$ określimy jako granicę sum riemannowskich

$$\int_a^b f(t)x(t)dt = l.i.m. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t'_{in})x(t'_{in})(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}), \quad (\text{A.2.3})$$

gdzie t'_{in} jest dowolnym ciągiem spełniającym następujące nierówności

$$t_i^{(n)} \leq t'_{in} \leq t_{i+1}^{(n)}. \quad (\text{A.2.4})$$

Twierdzenie A.5. Całka w sensie średniokwadratowym $\int_a^b f(t)x(t)dt$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje i jest skończona zwykła podwójna całka Riemanna

$$\int_a^b \int_a^b \overline{f(t_1)f(t_2)} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (\text{A.2.5})$$

Operacja uśredniania jest przemienna względem różniczkowania i całkowania w sensie średniokwadratowym, to znaczy

$$\frac{dE[x(t)]}{dt} = E \frac{dx(t)}{dt}, \quad (\text{A.2.6})$$

$$E \int_a^b f(t)x(t)dt = \int_a^b f(t)E[x(t)]dt. \quad (\text{A.2.7})$$

Ta własność jest słuszna dla dowolnej operacji liniowej L , tzn. jeśli L_t jest liniowym operatorem przekształcającym proces drugiego rzędu $x(t)$ w proces drugiego rzędu $y(t)$, czyli

$$y(t) = L_t[x(t)], \quad (\text{A.2.8})$$

wówczas

$$E[y(t)] = L_t[E[x(t)]]. \quad (\text{A.2.9})$$

Ponadto funkcja autokorelacji procesu $y(t)$ jest określona zależnością

$$R_{yy}(t_1, t_2) = L_{t_1} L_{t_2} R_{xx}(t_1, t_2). \quad (\text{A.2.10})$$

W szczególnym przypadku, gdy $L_t = L$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = L^2 R_{xx}(t_1, t_2). \quad (\text{A.2.11})$$

A.2.2. Całki stochastyczne względem procesów dyfuzyjnych

W analizie procesów stochastycznych konstrukcje całek, a także reguły różniczkowania różnią się od odpowiadających im operacji dla funkcji deterministycznych. Zacytujemy dalej jedynie podstawowe definicje i twierdzenia, zaczynając od historycznie najwcześniej wprowadzonych całek stochastycznych względem procesów dyfuzyjnych, zwanych całkami Itô oraz Stratonowicza.

Definicja A.21. *Całką stochastyczną Itô* nieantycypującej funkcji ($\mathcal{F}_t$ -mierzalnej) $f(x(t), t)$ na przedziale $[0, T]$ względem pewnego procesu dyfuzyjnego $x(t)$ nazywamy granicę średniokwadratową sumy Riemanna

$$\int_0^T f(x(t), t) dx(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f(x(t_i), t_i) [x(t_{i+1}) - x(t_i)], \quad (\text{A.2.12})$$

gdzie

$$E \int_0^T f^2(x(t), t) dt < \infty, 0 = t_1 < \dots < t_{N+1} = T, \Delta t = \max_i (t_{i+1} - t_i)$$

i granica nie zależy od wyboru punktów t_i .

W odróżnieniu od całki średniokwadratowej, określonej zależnością (A.2.3), wartość całki stochastycznej funkcji nieantycypującej $f(x(t), t)$ na przedziale $[0, T]$ względem procesu dyfuzyjnego $x(t)$ zależy od wyboru punktów pośrednich t'_i , dla których wyznaczane są wartości funkcji $f(x(t), t)$ w sumach Riemanna, to znaczy przedział $[t_i, t_{i+1}]$ jest traktowany jako pewien zbiór wypukły i dowolną wartość z tego przedziału t'_i możemy przedstawić jako kombinację wypukłą punktów t_i i t_{i+1} postaci $t'_i = \beta t_i + (1 - \beta)t_{i+1}$, a wartość funkcji $f(x(t), t)$ w tym przedziale jako $f(\beta x(t_i) + (1 - \beta)x(t_{i+1}), \beta t_i + (1 - \beta)t_{i+1})$, gdzie β jest pewnym rzeczywistym parametrem $0 \leq \beta \leq 1$. Wówczas wzór definiujący całkę stochastyczną nieantycypującej funkcji $f(x(t), t)$ ($\mathcal{F}_t$ -mierzalnej) na przedziale $[0, T]$ względem procesu dyfuzyjnego $x(t)$ ma postać definicji stochastycznej całki Itô, gdzie równość (A.2.12) jest zastąpiona następującą

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(x(t), t) d_\beta x(t) = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f(\beta x(t_i) + (1 - \beta)x(t_{i+1}), \beta t_i + (1 - \beta)t_{i+1}) [x(t_{i+1}) - x(t_i)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

Ta ogólna definicja całki stochastycznej zawiera dwa specjalne przypadki $\beta = 1$ oraz $\beta = \frac{1}{2}$, nazywane odpowiednio *stochastyczną całką Itô* oraz *stochastyczną całką Stratonowicza*. Wzajemną zależność pomiędzy całkami ustala poniższe twierdzenie.

Twierdzenie A.6. Jeśli $x(t), t \in [0, T]$ jest procesem dyfuzyjnym, $f(x(t), t)$ jest nieliniową nieantycypującą funkcją na przedziale $[0, T]$ mającą ciągle pochodne ze względu na obydwa argumenty oraz

$$E \int_0^T f^2(x(t), t) dt < \infty,$$

to zachodzi równość

$$\int_0^T f(x(t), t) d_\beta x(t) = \int_0^T f(x(t), t) dx(t) + (1 - \beta) \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) B(x(t), t) dt,$$

gdzie $B(x(t), t)$ jest współczynnikiem dyfuzji określonym za pomocą zależności (A.1.35), $0 \leq \beta \leq 1$.

Definicję całki stochastycznej i twierdzenie A.6 można rozszerzyć na procesy wektorowe.

Definicja A.22. Niech $\mathbf{x}(t)$ będzie r -wymiarowym procesem dyfuzyjnym dla $t \in [0, T]$, którego wektor dryftu $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ i macierz dyfuzji $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ łącznie z pierwszymi pochodnymi $\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) / \partial x_j$, $j = 1, \dots, r$ są ciągłe względem obu argumentów. Niech $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ będzie nieliniową nieantycypującą funkcją o wartościach w $\mathbf{R}^r$, ciągłą względem $\mathbf{x}$, taką że dla $t \in [0, T]$ spełnia warunki

(i) istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}$ $j = 1, \dots, r$,

(ii) $\int_0^T \mathbb{E}[|\mathbf{f}^T(\mathbf{x}(s), s) \mathbf{A}(\mathbf{x}(s), s)|] ds < \infty$,

(iii) $\int_0^T \mathbb{E}[|\mathbf{f}^T(\mathbf{x}(s), s) \mathbf{B}(\mathbf{x}(s), s) \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)|] ds < \infty$,

wówczas *stochastyczna całka wektorowa* jest określona wzorem

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(s), s) d_\beta \mathbf{x}(t) = \\ = l.i.m. \sum_{\Delta t \rightarrow 0}^{N-1} \mathbf{f}^T(\beta \mathbf{x}(t_i) + (1-\beta) \mathbf{x}(t_{i+1}), \beta t_i + (1-\beta) t_{i+1}) [\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)], \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

gdzie $\Delta t = \max[t_{i+1} - t_i]$, $0 = t_0 < \dots < t_N = T$.

W podobny sposób, jak dla funkcji skalarnej, zdefiniowane są stochastyczne całki Itô oraz Stratonowicza, tj. dla $\beta = 1$ – wektorowa całka Itô oraz dla $\beta = \frac{1}{2}$ – wektorowa całka Stratonowicza.

Stratonowicz udowodnił, że wzajemny związek między wektorowymi, stochastycznymi całkami Itô oraz Stratonowicza, oznaczonymi odpowiednio przez

$$I_I = \int_0^T \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(s), s) d_1 \mathbf{x}(t), \quad I_S = \int_0^T \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(s), s) d_{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(t), \quad (\text{A.2.15})$$

jest następujący

$$I_S = I_I + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \int_0^T \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}(t), t) b_{jk}(\mathbf{x}(t), t) dt, \quad (\text{A.2.16})$$

gdzie $b_{jk}(\mathbf{x}(t), t)$ są elementami macierzy dyfuzji procesu $\mathbf{x}(t)$.

A.2.3. Formuła Itô dla procesów dyfuzyjnych

Podamy teraz formułę różniczkowania funkcji wektorowej procesu dyfuzyjnego.

Niech $\mathbf{x}(t)$ będzie n -wymiarowym procesem stochastycznym określonym dla $t \in [0, T]$, to znaczy $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, mającym różniczkę stochastyczną

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(t, \omega)dt + \boldsymbol{\sigma}(t, \omega)d\boldsymbol{\xi}(t), \quad (\text{A.2.17})$$

gdzie $\boldsymbol{\xi}(t)$ jest r -wymiarowym procesem Wienera dla $t \in [0, T]$.

Wektor $\mathbf{a}(t, \omega) = [a_1(t, \omega), \dots, a_n(t, \omega)]^T$ i macierz $\boldsymbol{\sigma}(t, \omega) = [\sigma_{ij}(t, \omega)]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$ składają się z nieliniowych, nieantycypujących funkcji, spełniających warunki

$$P \int_0^T |a_i(t, \omega)| dt < \infty = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.2.18})$$

$$P \int_0^T |\sigma_{ij}^2(t, \omega)| dt < \infty = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r.$$

Wówczas wyznaczenie różniczki zupełnej pewnej nieliniowej funkcji wielu zmiennych $f(\mathbf{x}(t), t)$ ustala następujące twierdzenie.

Twierdzenie A.7. Niech $f(t, y_1, \dots, y_n)$ będzie ciągłą i ma ciągle pochodne $\partial f / \partial t$, $\partial f / \partial y_i$, $\partial^2 f / \partial y_i \partial y_j$, $i, j = 1, \dots, n$. Wówczas proces stochastyczny $f(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ ma różniczkę stochastyczną postaci

$$\begin{aligned} df(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \sum_{k=1}^r \sigma_{ik}(t, \omega) \sigma_{jk}(t, \omega) dt + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \sigma_{ik}(t, \omega) d\xi_k. \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

W szczególnym przypadku, gdy $r = n$ i funkcja $f(\mathbf{x}(t), t)$ jest formą kwadratową

$$f(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t), \quad (\text{A.2.20})$$

gdzie $\mathbf{H}(t)$ jest macierzą deterministyczną, $\mathbf{x}(t)$ jest procesem dyfuzyjnym o różniczce

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(t)dt + \boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{\xi}(t), \quad (\text{A.2.21})$$

wówczas

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t)) = & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{a}(t) + \mathbf{a}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t) + \\ & + \mathbf{x}^T(t) \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} \mathbf{x}(t) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\sigma}^T(t) \mathbf{H}(t)) dt + \\ & + [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{H}(t) \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{\sigma}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t)] d\boldsymbol{\xi}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

gdzie $\text{tr}(\mathbf{A})$ oznacza ślad macierzy $\mathbf{A}$, tj. jeśli $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, to

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (\text{A.2.23})$$

Jeśli założymy, że $\mathbf{H}(t)$ jest macierzą jednostkową, niezależną od t , czyli $\mathbf{H}(t) = \mathbf{I}$, wówczas zachodzi

$$\begin{aligned} d(|\mathbf{x}(t)|^2) = & \mathbf{x}^T \mathbf{a}(t) + \mathbf{a}^T(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \sigma_{ii}^2(t) dt + \\ & + [\mathbf{x}^T \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{\sigma}^T(t) \mathbf{x}(t)] d\boldsymbol{\xi}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

A.2.4. Stochastyczne równania różniczkowe Itô i Stratonowicza dla procesów dyfuzyjnych

Rozważmy wektorowe, stochastyczne równanie różniczkowe Itô

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})dt + \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x})dw_k(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.2.25})$$

gdzie $\mathbf{F}, \mathbf{G}_k : [0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ są nieliniowymi, deterministycznymi funkcjami wektorowymi $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_n]^T$, $\mathbf{G}_k = [\sigma_k^i]$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, M$,

natomiast w_k są standardowymi, niezależnymi procesami Wienera, mierzalnymi względem niemalejącej rodziny σ -ciał $\mathfrak{F}_t$, $t \in [0, T]$.

Oznaczmy przez $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ przestrzeń mierzalną funkcji $(\mathbf{x}(t), t \in [0, T])$ ciągłych na $[0, T]$ z σ -ciałem $\mathcal{B}_T = \sigma(\mathbf{x} : \mathbf{x}(s), s \leq T)$. Oznaczmy analogicznie $\mathcal{B}_t = \sigma(\mathbf{x} : \mathbf{x}(s), s \leq t)$. Niech $F_i(t, \mathbf{x})$ oraz $\sigma_k^i(t, \mathbf{x})$ będą nieantycypującymi funkcjonalami, to znaczy $\mathcal{B}_t$ -mierzalnymi dla wszystkich $t \in [0, T]$.

Definicja A.23. Proces stochastyczny $\mathbf{x}(t)$, $t \in [0, T]$, ciągły z prawdopodobieństwem 1, jest nazywany *silnym rozwiązaniem* lub po prostu *rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego* (A.2.25) z $\mathcal{F}_0$ -mierzalnym warunkiem początkowym $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, jeśli dla wszystkich $t \in [0, T]$, wektorowe zmienne losowe $\mathbf{x}(t)$ są $\mathcal{F}_t$ -mierzalne, przy czym

$$P \int_0^T |\mathbf{F}(t, \mathbf{x})| dt < \infty = 1, \quad (\text{A.2.26})$$

$$P \sum_{k=1}^M \int_0^T |\mathbf{G}_k(t, \mathbf{x})|^2 dt < \infty = 1, \quad (\text{A.2.27})$$

($|\cdot|$ jest normą Euklidesa) oraz z prawdopodobieństwem 1 dla $t \in [0, T]$ mamy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}) ds + \sum_{k=1}^M \int_0^t \mathbf{G}_k(s, \mathbf{x}) dw_k(s). \quad (\text{A.2.28})$$

Definicja A.24. Mówimy, że stochastyczne równanie różniczkowe (A.2.25) ma *jednoznacznie silne rozwiązanie*, jeśli dla dowolnych jego silnych rozwiązań $\mathbf{x}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $t \in [0, T]$ zachodzi zależność

$$P \sup_{t \in [0, T]} |\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)| > 0 = 0. \quad (\text{A.2.29})$$

Podamy teraz najprostsze twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań.

Twierdzenie A.8. Niech współrzędne wektorów $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ oraz $\mathbf{G}_k(\mathbf{x}, t)$, $k = 1, \dots, M$ będą nieantycypującymi funkcjonalami, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_T$, $t \in [0, 1]$, spełniającymi warunek Lipschitza

$$\begin{aligned} & |F_i(t, \mathbf{x}) - F_i(t, \mathbf{y})|^2 + |\sigma_k^i(t, \mathbf{x}) - \sigma_k^i(t, \mathbf{y})|^2 \\ & \leq L_1 \int_0^t |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|^2 dK(s) + L_2 |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2.30})$$

oraz warunek wzrostu

$$F_i^2(t, \mathbf{x}) + (\sigma_k^i)^2(t, \mathbf{x}) \leq L_1 \int_0^t (1 + |\mathbf{x}(s)|^2) dK(s) + L_2(1 + (\mathbf{x}(t))^2), \quad (\text{A.2.31})$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, M$, gdzie $L_1 > 0$ oraz $L_2 > 0$ są stałymi, $K(s)$ jest funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą, $0 \leq K(s) \leq 1$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}_T$. Niech warunek początkowy $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\omega)$ będzie $\mathcal{F}_0$ -mierzalną, wektorową zmienną losową, taką że

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n |x_{0i}| < \infty\right\} = 1. \quad (\text{A.2.32})$$

Wówczas równanie (A.2.25) ma jednoznaczne silne rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$, mieralne względem $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, 1]$.

Jeśli założymy, że istnieje pewna funkcja $V(t, \mathbf{x})$ mająca ciągle i ograniczone pochodne pierwszego rzędu względem t oraz drugiego rzędu względem współrzędnych wektora $\mathbf{x}$, dla $t \in [0, T]$ i $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, co oznaczamy przez $V \in \mathbf{C}_2$, wówczas z twierdzenia A.7 wynika, że

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}(t)) - V(s, \mathbf{x}(s)) &= \\ &= \int_s^t \mathcal{L}(V(u, \mathbf{x}(u))) du + \sum_{k=1}^M \int_s^t \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}_k(u, \mathbf{x}(u)) dw_k(u), \end{aligned} \quad (\text{A.2.33})$$

gdzie operator $\mathcal{L}(\cdot)$ jest określony w zależności od definicji całki stochastycznej, występującej po prawej stronie równania (A.2.28). Jeśli jest to całka stochastyczna Itô, wówczas stochastyczne równanie (A.2.25) jest nazywane *stochastycznym równaniem Itô*, jeśli zaś całkę stochastyczną uważamy za całkę Stratonowicza, to równanie (A.2.25) jest nazywane *stochastycznym równaniem Stratonowicza*. Dla uproszczenia równania te będziemy nazywać odpowiednio *równaniem Itô* lub *równaniem Stratonowicza*. Podobna odpowiedniość nazw zostaje zachowana dla różniczek $d_I \xi_k$ i $d_S \xi_k$ oraz dla operatorów $\mathcal{L}_I$ i $\mathcal{L}_S$.

Z równań (A.2.17), (A.2.28) oraz (A.2.33) wynika, że operatory Itô oraz Stratonowicza są zdefiniowane następująco

$$\mathcal{L}_I(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{F}^T(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x}) \right\rangle^2, \quad (\text{A.2.34})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x}) \right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x})^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2.35})$$

gdzie $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Stochastyczne równanie różniczkowe (A.2.25), rozumiane „w sensie Stratonowicza”, jest równoważne następującemu równaniu Itô

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x}) dt + \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_k(t, \mathbf{x}) dw_k(t). \quad (\text{A.2.36})$$

To oznacza, że wszystkie uzyskane wyniki dla równań Itô można wykorzystać przy analizie równań Stratonowicza. Należy podkreślić, że gdy funkcje $\mathbf{G}_k$ nie zależą od wektora $\mathbf{x}$, wówczas równania Itô i Stratonowicza są identyczne.

Z uwagi na to, że w książce najczęściej korzystamy z równań Itô, dla uproszczenia zapisu przyjmiemy oznaczenie $\mathcal{L}_I(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot)$.

Ponieważ liniowe układy są szczególnie ważne w modelowaniu układów dynamicznych, podamy twierdzenie o istnieniu silnych rozwiązań liniowego, wektorowego, stochastycznego równania różniczkowego.

Twierdzenie A.9. Niech elementy funkcji wektorowej

$$\mathbf{A}_0(t) = [a_0^1(t), \dots, a_0^n(t)]^T$$

oraz macierzy

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad \mathbf{G}_k = [\sigma_{k0}^i], \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, M$$

będą funkcjami mierzalnymi (deterministycznymi) zmiennej $t \in [0, 1]$, spełniającymi warunki

$$\int_0^1 |a_0^i(t)| dt < \infty, \quad \int_0^1 |a_{ij}(t)| dt < \infty, \quad \int_0^1 |(\sigma_{k0}^i)^2(t)| dt < \infty. \quad (\text{A.2.37})$$

Wówczas wektorowe, stochastyczne równanie różniczkowe

$$d\mathbf{x} = [\mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)]dt + \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_{k0}(t) d\xi_k(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.2.38})$$

gdzie $\xi_k(t)$ są niezależnymi procesami Wienera mierzalnymi względem $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, 1]$, ma jednoznaczne silne rozwiązanie, określone wzorem całkowym

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \Phi(t, 0) \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s, 0) \mathbf{A}_0(s) ds + \\ & + \sum_{k=1}^M \int_0^t \Phi^{-1}(s, 0) \mathbf{G}_{k0}(s) d\xi_k(s) , \end{aligned} \quad (\text{A.2.39})$$

gdzie $\Phi(t, 0)$ jest macierzą fundamentalną o wymiarach $n \times n$

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{A}(s) \Phi(s, 0) ds, \quad (\text{A.2.40})$$

natomiast $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową o wymiarach $n \times n$.

Rozwiązanie (A.2.39) może być rozszerzone dla dowolnego $t \in [0, T]$ przy założeniu, że elementy wektora $\mathbf{A}_0$ oraz macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{G}_k$ są funkcjami mierzalnymi i ograniczonymi dla $t \in [0, T]$.

Interpretacja fizykalna równania Stratonowicza

Równania różniczkowe ze stochastycznymi parametrami są często używane w modelowaniu rzeczywistych procesów, np. fizycznych, chemicznych, biologicznych, technicznych lub ekonomicznych. Przykładem takiego równania jest skalarne równanie Langevina

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) + G(t, x(t))\dot{w}(t), \quad (\text{A.2.41})$$

gdzie $F(t, x)$ oraz $G(t, x)$ są nieliniowymi, skalarnymi funkcjami, a $\dot{w}(t)$ jest gaussowskim białym szumem.

Z uwagi na fakt, że biały szum jest abstrakcją i w realnym świecie mogą działać jedynie szумы kolorowe lub niestacjonarne, pojawia się następujący problem. Rozważmy rodzinę równań różniczkowych (A.2.41), gdzie proces $\dot{w}(t)$ jest zastąpiony ciągiem stacjonarnych procesów gaussowskich szerokopasmowych (procesów, których gęstość widmowa mocy procesu ma „szeroki nośnik”) $\{\eta^n(t)\}$, $n = 1, 2, \dots$. Załóżmy, że ciąg $\{\eta^n(t)\}$ zbiega w pewnym sensie do gaussowskiego białego szumu. Dla przykładu, ze wzrostem n wzrasta długość pasma (wielkość nośnika) gęstości widmowej mocy procesu $\{\eta^n(t)\}$. Załóżmy, że dla każdego n proces $\eta^n(t)$ ma regularne realizacje. Wówczas odpowiedni ciąg $\{x_n(t)\}$ jest rozwiązaniem tej rodziny równań różniczkowych

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = F(t, x_n(t)) + G(t, x_n(t))\eta^n(t). \quad (\text{A.2.42})$$

Przypuśćmy, że ciąg $\{x_n(t)\}$ zbiega do pewnego procesu $\tilde{x}(t)$. Wówczas pojawiają się dwa pytania: czym jest proces $\tilde{x}(t)$ i jaki jest jego związek z procesem $x(t)$, będącym rozwiązaniem odpowiedniego równania Itô

$$dx(t) = F(t, x(t))dt + G(t, x(t))d_I w(t). \quad (\text{A.2.43})$$

Wong oraz Zakai wykazali, że ciąg rozwiązań $\{x_n(t)\}$ zbiega do rozwiązania odpowiedniego równania Stratonowicza

$$dx(t) = F(t, x(t))dt + G(t, x(t))d_S w(t) \quad (\text{A.2.44})$$

lub równoważnego równania Itô

$$dx(t) = F(t, x(t))dt + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x}(t, x(t))G(t, x(t))dt + G(t, x(t))dw(t). \quad (\text{A.2.45})$$

Ten ważny wynik został uogólniony przez Papanicolau i Kohlera dla przypadku wielowymiarowego.

A.3. Równania momentów w liniowych, stochastycznych układach dynamicznych

Wyznaczanie momentów rozwiązań (odpowiedzi układu) w dynamicznych układach stochastycznych jest jednym z podstawowych problemów stochastycznej analizy. W tym rozdziale omówimy podstawowe metody rozwiązywania liniowych, stochastycznych równań różniczkowych oraz metody wyznaczania ich momentów.

A.3.1. Układy liniowe z addytywnymi wymuszeniami

Rozważmy liniowe, wektorowe, stochastyczne równanie różniczkowe z addytywnymi wymuszeniami

$$d\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)]dt + \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_{k0}(t)dw_k(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.3.1})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T, \\ \mathbf{A}_0(t) &= [a_0^1(t), \dots, a_0^n(t)]^T, \\ \mathbf{A}(t) &= [a_{ij}(t)], \end{aligned}$$

$\mathbf{G}_{k0}(t) = [\sigma_{k0}^1(t), \dots, \sigma_{k0}^n(t)]^T$ są n -wymiarowymi wektorami,
 $w_k(t)$ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera, $i, j = 1, \dots, n$,
 $k = 1, \dots, M$,

warunek początkowy $\mathbf{x}_0$ jest wektorową zmienną losową, niezależną od
 $w_k(t)$, $k = 1, \dots, M$ oraz $\nu(t, \mathbf{v})$,

a_0^i , a_{ij} i σ_{k0}^i są ograniczonymi, mierzalnymi, deterministycznymi funkcjami zmiennej $t \in \mathbf{R}^+$.

Wówczas rozwiązanie (silne) jest określone zależnością

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, s)\mathbf{A}_0(s)ds + \int_{t_0}^t \Psi(t, s) \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_{k0}(s)dw_k(s), \quad (\text{A.3.2})$$

gdzie $\Psi(t, t_0)$ jest $(n \times n)$ -wymiarową macierzą fundamentalną równania jednorodnego

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (\text{A.3.3})$$

W szczególności, gdy $\mathbf{A}$ jest macierzą stałą, wówczas

$$\Psi(t, t_0) = \Psi(t - t_0) = \exp \{ \mathbf{A}(t - t_0) \} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \mathbf{A}^l(t - t_0)^l \quad (\text{A.3.4})$$

i zależność (A.3.2) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \exp \{ \mathbf{A}(t - t_0) \} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp \{ \mathbf{A}(t - s) \} \mathbf{A}_0(s)ds + \\ & + \int_{t_0}^t \exp \{ \mathbf{A}(t - s) \} \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_{k0}(s)d\boldsymbol{\xi}(s). \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

Korzystając z formuły Itô i operacji uśredniania, otrzymamy równania dla wartości średnich oraz momentów drugiego rzędu

$$\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = \mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{m}(t), \quad \mathbf{m}(t_0) = \mathbf{m}_0, \quad (\text{A.3.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\Gamma}(t)}{dt} = & \mathbf{m}(t)\mathbf{A}_0^T(t) + \mathbf{A}_0(t)\mathbf{m}^T(t) + \boldsymbol{\Gamma}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Gamma}(t), \\ & + \sum_{k=1}^M \mathbf{G}_{k0}(t)\mathbf{G}_{k0}^T(t) \quad \boldsymbol{\Gamma}(t_0) = \boldsymbol{\Gamma}_0, \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(t) &= E[\mathbf{x}(t)], \quad \boldsymbol{\Gamma}(t) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)], \\ \mathbf{m}_0 &= E[\mathbf{x}(t_0)], \quad \boldsymbol{\Gamma}_0 = E[\mathbf{x}(t_0)\mathbf{x}^T(t_0)]. \end{aligned}$$

A.3.2. Układy liniowe z addytywnymi i parametrycznymi wymuszeniami

Zacznijmy od rozwiązania dwóch prostych przykładów skalarnych, liniowych, stochastycznych równań różniczkowych.

Przypadek jednorodny. Rozważmy liniowe, skalarne, jednorodne, stochastyczne równanie Itô

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + \sigma(t)x(t)dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{A.3.8})$$

gdzie $t \in [t_0, \infty)$, $a(t)$ i $\sigma(t)$ są pewnymi nieliniowymi funkcjami zmiennej t , warunek początkowy x_0 jest zmienną losową niezależną od standardowego procesu Wienera $w(t)$.

Korzystając z formuły Itô, można wykazać, że rozwiązanie równania (A.3.8) jest procesem stochastycznym

$$x(t) = \psi(t, t_0)x_0, \quad (\text{A.3.9})$$

gdzie

$$\psi(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t a(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_{t_0}^t \sigma(s)dw(s), \quad (\text{A.3.10})$$

którego p -ty moment ma postać

$$E[x^p(t)] = E[x_0^p] \exp \left\{ p \int_{t_0}^t a(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \frac{p^2}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2(s)ds \right\}. \quad (\text{A.3.11})$$

Przypadek niejednorodny. Rozważmy liniowe, skalarne, niejednorodne, stochastyczne równanie Itô

$$dx(t) = [a(t)x(t) + b(t)]dt + [\sigma(t)x(t) + q(t)]dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{A.3.12})$$

gdzie $t \in [t_0, \infty)$, $b(t)$ i $q(t)$ są pewnymi nieliniowymi funkcjami czasu, wszystkie pozostałe oznaczenia są takie same, jak w równaniu (A.3.8).

Wprowadźmy nową zmienną

$$z(t) = x(t)[\psi(t, t_0)]^{-1}, \quad (\text{A.3.13})$$

gdzie $\psi(t, t_0)$ zostało określone zależnością (A.3.10). Korzystając z formuły Itô, otrzymamy równanie dla procesu $z(t)$

$$dz(t) = \{[b(t) - q(t)\sigma(t)]dt + q(t)d\xi(t)\}[\psi(t, t_0)]^{-1}. \quad (\text{A.3.14})$$

Całkując równanie (A.3.14) i wprowadzając transformatę odwrotną do (A.3.13), otrzymamy rozwiązanie

$$x(t) = \psi(t, t_0) \left\{ x(t_0) + \int_{t_0}^t [\psi(s, t_0)]^{-1} [b(s) - q(s)\sigma(s)] ds + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t [\psi(s, t_0)]^{-1} q(s) dw(s) \right\}. \quad (\text{A.3.15})$$

W odróżnieniu od przypadku jednorodnego, wygodniej jest znaleźć równanie różniczkowe dla p -tego momentu zamiast uśredniać p -tą potęgę ($p > 0$) wyrażenia (A.3.15). Dlatego, stosując ponownie formułę Itô do funkcji x^p dla $p > 0$ z wykorzystaniem równania (A.3.12), a następnie uśredniając otrzymane równanie, znajdujemy

$$\frac{dE[x^p(t)]}{dt} = E[x^p(t)] pa(t) + \frac{p(p-1)}{2} \sigma^2(t) + E[x^{p-1}(t)] [pb(t) + \\ + p(p-1)q(t)\sigma(t)] + E[x^{p-2}(t)] \frac{p(p-1)}{2} q^2(t), \quad E[x^p(t_0)] = E[x_0^p]. \quad (\text{A.3.16})$$

Niestety, w ogólnym przypadku liniowego, wektorowego, stochastycznego równania różniczkowego z parametrycznymi wymuszeniami (współczynniki przy szumach są zależne od wektora stanu) nie można znaleźć rozwiązania w postaci analitycznej. Taka możliwość istnieje jedynie dla liniowego, wektorowego, stochastycznego równania różniczkowego z addytywnymi wymuszeniami (współczynniki przy szumach są niezależne od wektora stanu). W przypadku wektorowym będziemy rozważać równania momentów pierwszego i drugiego rzędu.

Rozważmy liniowe, wektorowe, stochastyczne równanie Itô z wymuszeniami addytywnymi i parametrycznymi

$$d\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)]dt + \sum_{k=1}^M [\mathbf{G}_{k0}(t) + \mathbf{G}_k(t)\mathbf{x}(t)]dw_k(t), \quad (\text{A.3.17})$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T, \\ \mathbf{A}_0(t) &= [a_0^1(t), \dots, a_0^n(t)]^T, \\ \mathbf{G}_{k0}(t) &= [\sigma_{k0}^1(t), \dots, \sigma_{k0}^n(t)]^T \text{ są } n\text{-wymiarowymi wektorami,} \\ \mathbf{A}(t) &= [a_{ij}(t)], \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \mathbf{G}_k(t) &= [\sigma_{kj}^i(t)] \text{ są } (n \times n)\text{-wymiarowymi macierzami,} \end{aligned}$$

$w_k(t)$, $k = 1, \dots, M$ są niezależnymi, standardowymi procesami Wienera,

warunek początkowy $\mathbf{x}_0$ jest wektorową zmienną losową,

a_0^i , a_{ij} , σ_{k0}^i są ograniczonymi, mierzalnymi, deterministycznymi funkcjami zmiennej $t \in [0, \infty)$.

Dla uproszczenia założmy, że warunek początkowy $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, \dots, x_{0n}]^T$ jest wektorową zmienną losową, niezależną od $w_k(t)$. Korzystając z formuły Itô i operacji uśredniania, otrzymamy równania dla wartości średnich oraz momentów drugiego rzędu

$$\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = \mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{m}(t), \quad \mathbf{m}(t_0) = \mathbf{m}_0, \quad (\text{A.3.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{\Gamma}(t)}{dt} = & \mathbf{m}(t)\mathbf{A}_0^T(t) + \mathbf{A}_0(t)\mathbf{m}^T(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{\Gamma}(t) + \\ & + \sum_{k=1}^M [\mathbf{G}_{k0}(t)\mathbf{G}_{k0}^T(t) + \mathbf{G}_k(t)\mathbf{m}(t)\mathbf{G}_{k0}(t) + \mathbf{G}_{k0}(t)\mathbf{m}^T(t)\mathbf{G}_k^T(t) + \\ & + \mathbf{G}_k(t)\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{G}_k^T(t)], \quad \mathbf{\Gamma}(t_0) = \mathbf{\Gamma}_0, \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

gdzie $\mathbf{m}(t) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(t)]$, $\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)]$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}(t_0)]$, $\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}(t_0)\mathbf{x}^T(t_0)]$.

Równania (A.3.18) i (A.3.19) dla współrzędnych mają postać

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = a_0^i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)m_j(t), \quad m_i(t_0) = m_{i0}, \quad (\text{A.3.20})$$

$$\frac{d\Gamma_{ij}(t)}{dt} = a_0^i(t)m_j(t) + a_0^j(t)m_i(t) + \sum_{l=1}^n [a_{il}(t)\Gamma_{lj}(t) + a_{jl}(t)\Gamma_{li}(t)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^M \sigma_{k0}^i(t)\sigma_{k0}^j(t) + \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^n [\sigma_{k\alpha}^i(t)\sigma_{k0}^j(t)m_\alpha(t) + \sigma_{k\alpha}^j(t)\sigma_{k0}^i(t)m_\alpha(t)] + \quad (\text{A.3.21})$$

$$+ \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sigma_{k\alpha}^i(t)\sigma_{k\beta}^j(t)\Gamma_{\alpha\beta}(t), \quad \Gamma_{ij}(t_0) = \Gamma_{ij0}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

gdzie

$$m_i(t) = \mathbf{E}[x_i(t)], \Gamma_{ij}(t) = \mathbf{E}[x_i(t)x_j(t)], m_{i0} = \mathbf{E}[x_i(t_0)], \Gamma_{ij0} = \mathbf{E}[x_i(t_0)x_j(t_0)].$$

Otrzymane równania momentów mają zamkniętą postać, to znaczy po prawej stronie równań nie ma momentów wyższych rzędów niż po lewej stronie, a ponadto momenty drugiego rzędu zależą jedynie od zmiennej t .

A.4. Metody dyskretyzacji stochastycznych równań różniczkowych

Z uwagi na to, że tylko dla nielicznych stochastycznych równań różniczkowych znane są rozwiązania analityczne, powstała konieczność opracowania metod wyznaczania przybliżonych rozwiązań równań, w szczególności metod numerycznych. Podstawowa idea tych metod polega na zastąpieniu stochastycznego równania różniczkowego jego dyskretną reprezentacją, to jest pewnym równaniem różnicowym. W szczególnym przypadku metoda polega na zastąpieniu skalarnego równania stochastycznego Itô

$$dx(t) = F(x(t), t)dt + \sum_{k=1}^M G_k(x(t), t)dw_k(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{A.4.1})$$

odpowiednim równaniem różnicowym

$$x_{i+1} = x_i + F_i \Delta t_i + \sum_{k=1}^M G_{k_i} \Delta w_{k_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{A.4.2})$$

W przypadku skalarnego, stochastycznego równania różniczkowego Stratonowicza

$$dx(t) = F(x(t), t)dt + \sum_{k=1}^M G_k(x(t), t)dw_k^*(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{A.4.3})$$

jego dyskretno-czasowa reprezentacja ma postać

$$x_{i+1} = x_i + F_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial G_k}{\partial x} \bigg|_i G_{k_i} \Delta t_i + \sum_{k=1}^M G_{k_i} \Delta w_{k_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{A.4.4})$$

gdzie $dw_k(t)$ i $dw_k^*(t)$, $k = 1, 2, \dots, M$ są różniczkami stochastycznymi w sensie Itô i Stratonowicza standardowych procesów Wienera

$$x_i = x(t_i), \quad F_i = F(x(t_i), t_i), \quad G_i = G(x(t_i), t_i),$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial x} \bigg|_i = \frac{\partial G_k(x(t), t)}{\partial x} \bigg|_{x=x_i}, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad (\text{A.4.5})$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad \Delta w_{k_i} = w(t_{i+1}) - w(t_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Dla celów estymacji parametrów modeli umieralności, opisanych wielowymiarowymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi z pojedynczym procesem Wienera, wygodnie jest korzystać jedynie z dwóch najprostszych metod dyskretyzacji, tj. *metody Milsteina* i *metody Eulera*.

Metoda Milsteina

$$x_{i+1}^j = x_i^j + F_i^j \Delta t + G_i^j \Delta w + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n G_i^l \frac{\partial G_i^j}{\partial x^l} (\Delta w)^2 - \Delta, \quad j = 1, \dots, n, i = 0, 1, \dots$$

Metoda Eulera

$$x_{i+1}^j = x_i^j + F_i^j \Delta t + G_i^j \Delta w, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots,$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ jest wektorem stanu, współrzędne wektorów dryftu i dyfuzji $\mathbf{F} = [F^1, \dots, F^n]^T$, $\mathbf{G} = [G^1, \dots, G^n]^T$ są nieliniowymi funkcjami wektora stanu.

Dodatek B

Elementy algebry zmodyfikowanych liczb rozmytych i zespolonych

B.1. Zmodyfikowane liczby rozmyte

Konstrukcja algebry zmodyfikowanych liczb rozmytych MFN jest taka sama, jak konstrukcja algebry skierowanych liczb rozmytych OFN, zaproponowana przez Kosińskiego z zespołem [61], [62].

Liczbę rozmytą przedstawiamy w postaci pary funkcji ciągłych (f_A, g_A) . Różnica polega na odmiennej definicji mnożenia elementów. O ile w algebrze OFN mnożenie zostało zdefiniowane jako mnożenie przez siebie poprzedników i następników

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = (f_A f_B, g_A g_B),$$

dla $\vec{A} = (f_A, g_A)$, $\vec{B} = (f_B, g_B)$, o tyle w algebrze MFN zdefiniujemy mnożenie elementów $\check{A} = (f_A, g_A)$ i $\check{B} = (f_B, g_B)$ w postaci

$$\check{A} \odot \check{B} = \frac{1}{2}(f_A f_B + g_A g_B), \frac{1}{2}(f_A g_B + g_A f_B) \quad .$$

Definicja B.1. Zmodyfikowaną liczbą rozmytą $\check{A}$ nazwiemy każdą uporządkowaną parę funkcji ciągłych

$$\check{A} = (f, g),$$

gdzie $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ spełniają aksjomaty (i)–(iii), określające równość, sumę i iloczyn zmodyfikowanych liczb rozmytych,

- (i) Zmodyfikowane liczby rozmyte $\check{A} = (f_A, g_A)$ oraz $\check{B} = (f_B, g_B)$ uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy $f_A(u) = f_B(u)$ oraz $g_A(u) = g_B(u)$, dla każdego $u \in [0, 1]$.
- (ii) Sumą zmodyfikowanych liczb rozmytych $\check{A} = (f_A, g_A)$ oraz $\check{B} = (f_B, g_B)$ nazywamy zmodyfikowaną liczbę rozmytą $\check{A} \oplus \check{B}$, pisząc

$$\check{A} \oplus \check{B} = (f_A, g_A) \oplus (f_B, g_B) = (f_A + f_B, g_A + g_B). \quad (\text{B.1.1})$$

(iii) Iloczynem zmodyfikowanych liczb rozmytych $\check{A} = (f_A, g_A)$ oraz $\check{B} = (f_B, g_B)$ nazywamy zmodyfikowaną liczbę rozmytą $\check{A} \odot \check{B}$, pisząc

$$\begin{aligned}\check{A} \odot \check{B} &= (f_A, g_A) \odot (f_B, g_B) = \\ &= \frac{1}{2}(f_A f_B + g_A g_B), \frac{1}{2}(f_A g_B + g_A f_B) \quad .\end{aligned}\tag{B.1.2}$$

Definicja B.2. Liczba $\check{C} = (f_C, g_C)$ jest wynikiem mnożenia zmodyfikowanej liczby rozmytej $\check{A} = (f_A, g_A)$ przez skalar d , co zapisujemy symbolicznie $\check{C} = d\check{A}$, jeśli

$$f_C(u) = df_A(u), \quad g_C(u) = dg_A(u).$$

Definicja B.1 określa iloczyn zmodyfikowanych liczb rozmytych w algebrze MFN. W algebrze CFN (*Complex-Valued Fuzzy Numbers*) definiujemy mnożenie w postaci

$$A \odot B = (f_A, g_A) \odot (f_B, g_B) = (f_A f_B - g_A g_B, f_A g_B + g_A f_B). \tag{B.1.3}$$

Rozważmy zatem algebrę oznaczoną dalej symbolem GFN, która uogólnia mnożenie elementów poprzez wprowadzenie współczynników liczbowych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$. Definicję mnożenia w algebrze GFN zapiszemy wzorem

$$(f_A, g_A) \odot (f_B, g_B) = (\alpha f_A f_B + \beta g_A g_B, \gamma f_A g_B + \delta g_A f_B). \tag{B.1.4}$$

W przypadku szczególnym, gdy przyjmiemy

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}, \tag{B.1.5}$$

otrzymamy (B.1.2), natomiast dla

$$\alpha = \gamma = \delta = 1, \quad \beta = -1 \tag{B.1.6}$$

otrzymamy (B.1.3).

Przykład B.1. Niech $\check{A} = (f_A, g_A)$ oraz $\check{B} = (f_B, g_B)$, gdzie

$$f_A(u) = a - s_A(1 - u), \quad g_A(u) = a + s_A(1 - u), \quad u \in [0, 1],$$

$$f_B(u) = b - s_B(1 - u), \quad g_B(u) = b + s_B(1 - u), \quad u \in [0, 1].$$

Możemy zapisać

$$(f_A, g_A) \oplus (f_B, g_B) = (f_A(u) + f_B(u), g_A(u) + g_B(u)),$$

gdzie dla $u \in [0, 1]$ zachodzi

$$f_A(u) + f_B(u) = a + b - (s_A + s_B)(1 - u),$$

$$g_A(u) + g_B(u) = a + b + (s_A + s_B)(1 - u).$$

Z kolei efekt mnożenia algebraicznego dla $\check{A}, \check{B} \in \text{MFN}$ przyjmuje postać

$$(\check{A} \odot \check{B})(u) = (ab + s_A s_B (1 - u)^2, ab - s_A s_B (1 - u)^2),$$

natomiast dla $A, B \in \text{CFN}$ mamy

$$(A \odot B)(u) = (-2(as_B + bs_A)(1 - u), 2ab - 2s_A s_B (1 - u)^2).$$

Istotnym zagadnieniem w każdej algebrze jest określenie elementu zerowego oraz jedności.

W algebrze skierowanych liczb rozmytych OFN element zerowy ma postać $\vec{0} = (0, 0)$, gdzie $0(u) = 0$ dla każdego $u \in [0, 1]$, natomiast element jednostkowy musi mieć postać $\vec{1} = (1, 1)$, aby dla każdego $\vec{A}$ zachodziło

$$\vec{A} \otimes \vec{1} = \vec{1} \otimes \vec{A}.$$

Znajdziemy najpierw ogólną postać elementu zerowego $(f_{\vec{0}}, g_{\vec{0}})$ w algebrze CFN. Zgodnie z definicją elementu zerowego, dla $(f_A, f_B) \in \text{CFN}$ powinno być

$$(f_A, f_B) \oplus (f_{\vec{0}}, g_{\vec{0}}) = (f_A, f_B). \quad (\text{B.1.7})$$

Mamy

$$(f_A, g_A) \oplus (f_{\vec{0}}, g_{\vec{0}}) = (f_A + f_{\vec{0}}, g_A + g_{\vec{0}}).$$

Z (B.1.7) wynika równość

$$(f_A + f_{\vec{0}}, g_A + g_{\vec{0}}) = (f_A, g_A),$$

stąd

$$f_A(u) + f_{\vec{0}}(u) = f_A(u), \quad g_A(u) + g_{\vec{0}}(u) = g_A(u), \quad u \in [0, 1].$$

Otrzymujemy $f_{\vec{0}}(u) = 0, g_{\vec{0}}(u) = 0$ dla $u \in [0, 1]$, czyli element zerowy ma postać $(0, 0)$.

W analogiczny sposób znajdziemy ogólną postać jedynki $(f_{\mathbb{I}}, g_{\mathbb{I}})$ w algebrze CFN, w której mnożenie jest określone wzorem (B.1.4). Dla każdego $(f_A, f_B) \in \text{CFN}$ powinien być spełniony warunek

$$(f_A, f_B) \odot (f_{\mathbb{I}}, g_{\mathbb{I}}) = (f_{\mathbb{I}}, g_{\mathbb{I}}) \odot (f_A, f_B) = (f_A, f_B). \quad (\text{B.1.8})$$

Mamy

$$(f_A, f_B) \odot (f_{\mathbb{I}}, g_{\mathbb{I}}) = (\alpha f_A f_{\mathbb{I}} + \beta g_A g_{\mathbb{I}}, \gamma f_A g_{\mathbb{I}} + \delta g_A f_{\mathbb{I}}).$$

Z (B.1.8) wynika, że powinna zachodzić równość

$$(\alpha f_A f_{\mathbb{I}} + \beta g_A g_{\mathbb{I}}, \gamma f_A g_{\mathbb{I}} + \delta g_A f_{\mathbb{I}}) = (f_A, g_A),$$

czyli dla każdego $u \in [0, 1]$ mamy

$$\alpha f_A(u) f_{\mathbb{I}}(u) + \beta g_A(u) g_{\mathbb{I}}(u) = f_A(u)$$

oraz

$$\gamma f_A(u) g_{\mathbb{I}}(u) + \delta g_A(u) f_{\mathbb{I}}(u) = g_A(u).$$

Równości te możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} \alpha f_A(u) & \beta g_A(u) & f_{\mathbb{I}}(u) \\ \delta g_A(u) & \gamma f_A(u) & g_{\mathbb{I}}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_A(u) \\ g_A(u) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.9})$$

Oznaczmy przez $\mathbb{G}(u)$ macierz z lewej strony (B.1.9), czyli

$$\mathbb{G}(u) = \begin{pmatrix} \alpha f_A(u) & \beta g_A(u) \\ \delta g_A(u) & \gamma f_A(u) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.10})$$

Zajmiemy się odwracalnością macierzy $\mathbb{G}(u)$ dla $u \in [0, 1]$. Warunkiem odwracalności jest

$$\det [\mathbb{G}(u)] \neq 0.$$

Mamy

$$\det [\mathbb{G}(u)] = \alpha \gamma f_A^2(u) - \beta \delta g_A^2(u).$$

Zatem dla $\alpha \gamma f_A^2(u) - \beta \delta g_A^2(u) \neq 0$ macierz $\mathbb{G}(u)$ można odwrócić.

Dla algebry MFN otrzymujemy na podstawie (B.1.6) $\alpha \gamma = \frac{1}{4}$, $\beta \delta = \frac{1}{4}$, czyli wyznacznik przyjmuje postać

$$\det [\mathbb{G}(u)] = \frac{1}{4}(f_A^2(u) - g_A^2(u)).$$

W przypadku algebry CFN mamy $\alpha\gamma = 1$, $\beta\delta = -1$ i wyznacznik wyraża się wzorem

$$\det [\mathbb{G}(u)] = f_A^2(u) + g_A^2(u).$$

Znajdziemy macierz $\mathbb{D}(u)$ dopełnień algebraicznych macierzy (B.1.10). Mamy

$$\mathbb{D}(u) = \begin{pmatrix} \gamma f_A(u) & -\delta g_A(u) \\ -\beta g_A(u) & \alpha f_A(u) \end{pmatrix},$$

co po traspozycji daje macierz $\mathbb{D}^T(u)$

$$\mathbb{D}^T(u) = \begin{pmatrix} \gamma f_A(u) & \beta g_A(u) \\ -\delta g_A(u) & \alpha f_A(u) \end{pmatrix}.$$

Tym samym macierz odwrotna $\mathbb{G}^{-1}(u)$ jest postaci

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^{-1}(u) &= \frac{1}{\det [\mathbb{G}(u)]} \begin{pmatrix} \gamma f_A(u) & -\beta g_A(u) \\ -\delta g_A(u) & \alpha f_A(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma f_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} & -\frac{\beta g_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} \\ -\frac{\delta g_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} & \frac{\alpha f_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Równanie macierzowe (B.1.9) może być teraz zapisane jako

$$\mathbb{G}(u) \begin{pmatrix} f_{\mathbb{I}}(u) \\ g_{\mathbb{I}}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_A(u) \\ g_A(u) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1.11})$$

a po lewostronnym przemnożeniu (B.1.11) przez $\mathbb{G}^{-1}(u)$ dostajemy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{\mathbb{I}}(u) \\ g_{\mathbb{I}}(u) \end{pmatrix} &= \mathbb{G}^{-1}(u) \begin{pmatrix} f_A(u) \\ g_A(u) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma f_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} & -\frac{\beta g_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} \\ -\frac{\delta g_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} & \frac{\alpha f_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_A(u) \\ g_A(u) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma f_A^2(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} - \frac{\beta g_A^2(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} \\ -\frac{\delta f_A(u)g_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} + \frac{\alpha f_A(u)g_A(u)}{\alpha\gamma f_A^2(u) - \beta\delta g_A^2(u)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w przypadku algebry CFN prawa strona redukuje się do

$$\begin{bmatrix} \frac{f_A^2(u)}{f_A^2(u) + g_A^2(u)} + \frac{g_A^2(u)}{f_A^2(u) + g_A^2(u)} \\ -\frac{f_A(u)g_A(u)}{f_A^2(u) + g_A^2(u)} + \frac{f_A(u)g_A(u)}{f_A^2(u) + g_A^2(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

natomiast w przypadku algebry MFN mamy

$$\begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2}f_A^2(u)}{\frac{1}{4}(f_A^2(u)-g_A^2(u))} - \frac{\frac{1}{2}g_A^2(u)}{\frac{1}{4}(f_A^2(u)-g_A^2(u))} \\ -\frac{\frac{1}{2}f_A(u)g_A(u)}{\frac{1}{4}(f_A^2(u)-g_A^2(u))} + \frac{\frac{1}{2}f_A(u)g_A(u)}{\frac{1}{4}(f_A^2(u)-g_A^2(u))} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzimy, czy element $\mathbb{I} = (1, 0)$ jest jednością w algebrze CFN oraz czy element $\check{\mathbb{I}} = (2, 0)$ jest jednością w algebrze MFN.

W przypadku CFN mamy

$$A \odot \mathbb{I} = (f_A, g_A) \odot (1, 0) = (f_A \cdot 1 - g_A \cdot 0, g_A \cdot 1 + f_A \cdot 0) = (f_A, g_A) = A$$

oraz

$$\mathbb{I} \odot A = (1 \cdot f_A - 0 \cdot g_A, 1 \cdot g_A + 0 \cdot f_A) = (f_A, g_A) = A,$$

czyli element $\mathbb{I} = (1, 0)$ jest jednością w algebrze CFN.

Postępując w analogiczny sposób w przypadku algebry MFN, mamy

$$\check{A} \odot \check{\mathbb{I}} = (f_A, g_A) \odot (2, 0) = (\frac{1}{2}(f_A \cdot 2 + g_A \cdot 0), \frac{1}{2}(g_A \cdot 2 + f_A \cdot 0)) = (f_A, g_A) = \check{A}$$

oraz

$$\check{\mathbb{I}} \odot \check{A} = (2, 0) \odot (f_A, g_A) = (\frac{1}{2}(2 \cdot f_A + 0 \cdot g_A), \frac{1}{2}(2 \cdot g_A + 0 \cdot f_A)) = (f_A, g_A) = \check{A},$$

a więc element $\check{\mathbb{I}} = (2, 0)$ jest jednością w algebrze MFN.

W algebrach OFN i CFN zupełnie inaczej wyglądają elementy jednostkowe, a w konsekwencji odmienną postać mają elementy odwrotne do każdego elementu niezerowego.

Dla algebry OFN element odwrotny do danego elementu $\vec{A}$, czyli element, dla którego

$$\vec{A} \otimes \vec{A}^{-1} = \vec{A}^{-1} \otimes \vec{A} = \vec{\mathbb{I}},$$

wyraża się wzorem

$$\vec{A}^{-1} = \frac{1}{f}, \frac{1}{g}.$$

Wystarczy zatem, aby któryś z członów $f(u)$, $g(u)$ dla pewnego $u \in [0, 1]$ był zerowy, a wtedy nie istnieje element odwrotny do elementu $\vec{A}$.

W przypadku algebry CFN element zerowy i jednostkowy mają postać odpowiednio $\mathbb{0} = (0, 0)$ oraz $\mathbb{1} = (1, 0)$, gdzie $0(u) = 0$, $\mathbb{1}(u) = 1$ dla każdego $u \in [0, 1]$. Ponadto dla dowolnego $A = (0, 0)$ zachodzi

$$A^{-1} = \frac{f}{f^2 + g^2}, -\frac{g}{f^2 + g^2}, \quad (\text{B.1.12})$$

zatem

$$A \odot A^{-1} = \frac{f^2}{f^2 + g^2} + \frac{g^2}{f^2 + g^2}, -\frac{fg}{f^2 + g^2} + \frac{fg}{f^2 + g^2} = (1, 0) = \mathbb{1}.$$

Jak widać tylko dla $A = (0, 0)$ nie istnieje element odwrotny w algebrze CFN. Fakt ten jest ważny, gdyż stanowi podstawowe założenie twierdzenia Gelfanda–Mazura, które mówi, że każda zespolona algebra Banacha z jednością, w której każdy niezerowy element jest odwracalny, jest izometrycznie izomorficzna z algebrą liczb zespolonych. Oznacza to, że istnieje odwzorowanie izomorficzne tych algebr na siebie i odległości pomiędzy danymi elementami są jednakowe, co stanowi treść pojęcia „izometria”. Ten ostatni fakt jest ważny także przy doborze odpowiedniej metryki, która umożliwi wyznaczenie parametrów nowego modelu umieralności.

B.2. Liczby i funkcje zespolone

Zawartość tego paragrafu została opracowana na podstawie rozdziału VI pt. „Liczby zespolone. Kwaterniony” książki W. Sierpińskiego [97], a także na podstawie dwóch monografii S. Sakai [95] oraz W. Żelazko [117].

Symbolem $\mathcal{A}$ oznaczana będzie dowolna algebra liniowa nad ciałem liczb zespolonych. Kolejne oznaczenia sygnalizować będą nowe własności algebry $\mathcal{A}$.

Jeśli w algebrze $\mathcal{A}$ zostanie wprowadzona operacja zwana inwolucją, oznaczana dalej symbolem $*$, to taką algebrę nazywać będziemy $*$ -algebrą Banacha. Jeśli norma w takiej $*$ -algebrze Banacha spełniać będzie warunek narzucany na normę w postaci $\|A^*A\| = \|A\|^2$, to taka algebra nazywana będzie algebrą C^* . Tego rodzaju algebr Banacha może być więcej, natomiast interesować nas będą tylko niektóre z nich. Istotne znaczenie ma przede wszystkim algebra $C(\mathcal{T})$, która jest algebrą C^* o szczególnych własnościach. Kolejne uszczegółowienie algebr Banacha oznaczać będziemy symbolami $\mathcal{A}_i$.

B.2.1. Algebra Banacha C^*

Niech $\mathcal{A}$ będzie liniową algebrą nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Oznacza to, że każdemu elementowi $A \in \mathcal{A}$ przyporządkowana została liczba rzeczywista $\|A\|$, zwana normą elementu A , spełniająca warunki

- (1) $\|A\| \geq 0$,
- (2) $\|A\| = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 0$,
- (3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- (4) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (5) Przestrzeń $\mathcal{A}$ jest przestrzenią zupełną w normie $\|\cdot\|$.

Definicja B.3. Odwzorowanie $A \rightarrow A^*$ algebry $\mathcal{A}$ w siebie nazywane jest inwolucją, jeśli spełnia warunki

- (i) $(A^*)^* = A$,
- (ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- (iii) $(AB)^* = B^*A^*$,
- (iv) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Algebra Banacha z inwolucją nazywana jest $*$ -algebrą Banacha.

Definicja B.4. Mówimy, że algebra Banacha $\mathcal{A}$ jest algebrą C^* , jeśli spełnia warunek

$$\|A^*A\| = \|A\|^2, \quad \text{dla każdego } A \in \mathcal{A}.$$

B.2.2. Algebra Banacha $C(\mathcal{T})$

Niech $\mathcal{T}$ będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Taką przestrzenią może być odcinek $[0, 1]$ na prostej. Jest nią też iloczyn kartezjański n odcinków $[0, 1]$. Niech $C(\mathcal{T})$ oznacza algebrę wszystkich ciągłych oraz zespolonych funkcji w $\mathcal{T}$.

Definicja B.5. Norma w przestrzeni Banacha $C(\mathcal{T})$ określana jest w postaci

$$\|A\| = \max_{\tau \in \mathcal{T}} |A(\tau)|,$$

natomiast inwolucja $*$ jest definiowana jako

$$A^*(\tau) = \bar{A}(\tau), \quad \text{dla każdego } \tau \in \mathcal{T}.$$

Ponieważ

$$(A^*A)(\tau) = A^*(\tau)A(\tau) = \bar{A}(\tau)A(\tau) = |A(\tau)|^2$$

oraz

$$|A^*A(\tau)| = |A(\tau)|^2,$$

zatem algebra $C(\mathcal{T})$ jest algebrą C^* .

Rozważmy przestrzeń wszystkich par $\vec{A} = (f, g)$ skierowanych liczb rozmytych. Każdą skierowaną liczbę $\vec{A} = (f, g)$ możemy potraktować jako funkcję zespoloną poprzez zanurzenie w przestrzeni liczb zespolonych postaci

$$A = f + ig$$

lub

$$A(u) = f(u) + ig(u), \quad u \in [0, 1],$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną.

Przestrzeń $\mathcal{A}_1$ jest przestrzenią Banacha, jeśli normę elementu $A \in \mathcal{A}_1$ zdefiniujemy w postaci

$$\|A\| = \max_{u \in [0, 1]} |A(u)|,$$

gdzie $|A(u)|$ – moduł liczby zespolonej $A(u) = f(u) + ig(u)$, czyli

$$|A(u)|^2 = f^2(u) + g^2(u), \quad u \in [0, 1].$$

Przykład B.2. Niech $\vec{A}$ będzie skierowaną liczbą rozmytą odpowiadającą symetrycznej, triangularnej liczbie rozmytej o wartości centralnej a i rozpiętości s . Skierowana liczba rozmyta $\vec{A}$ ma postać

$$\vec{A} = (f, g),$$

gdzie

$$f(u) = a - s(1 - u),$$

$$g(u) = a + s(1 - u).$$

Podnosząc do kwadratu obie równości, dostajemy

$$f^2(u) = a^2 + (1 - u)^2 s^2 - 2a(1 - u)s, \quad u \in [0, 1],$$

$$g^2(u) = a^2 + (1 - u)^2 s^2 + 2a(1 - u)s, \quad u \in [0, 1].$$

Dodając stronami, mamy

$$f^2(u) + g^2(u) = 2a^2 + 2(1 - u)^2 s^2.$$

Oznaczmy

$$F(u) = |A(u)|^2 = 2a^2 + 2(1-u)^2s^2.$$

Do wyznaczenia normy elementu A potrzebujemy znaleźć maksimum funkcji

$$F(u) = |A(u)|^2,$$

czyli w tym przypadku – maksimum funkcji

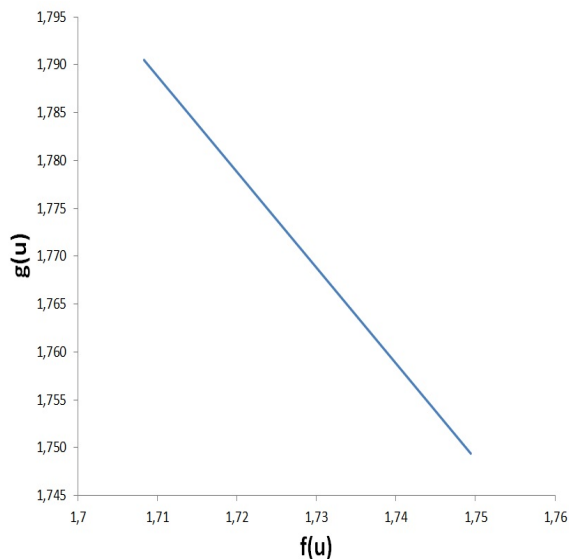
$$F(u) = 2a^2 + 2(1-u)^2s^2, \quad u \in [0, 1].$$

Niech $a = 1,7494$, $s = 0,0411$. Stąd dla $u \in [0, 1]$ otrzymujemy

$$f(u) = 1,7494 - 0,0411(1-u),$$

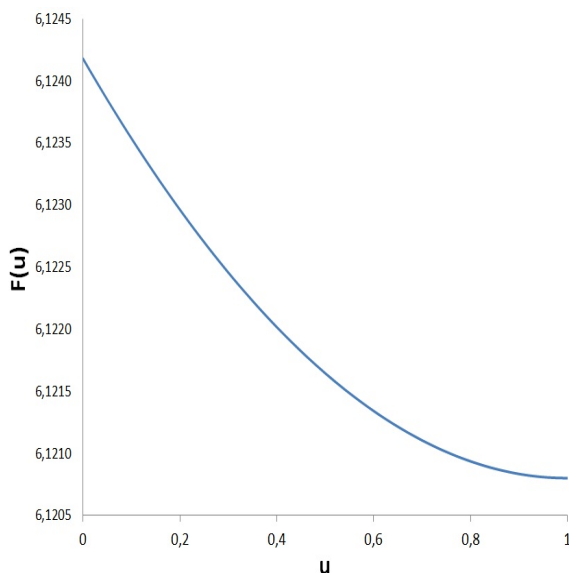
$$g(u) = 1,7494 + 0,0411(1-u).$$

Wykres funkcji zespolonej $(f(u), g(u))$ w tym przykładzie przedstawia rysunek B.1, natomiast funkcji $F(u)$ – rysunek B.2.



Rys. B.1. Funkcja zespolona $(f(u), g(u))$ dla $a = 1,7494$, $s = 0,0411$

Źródło: opracowanie własne



Rys. B.2. Funkcja $F(u)$ dla $a = 1,7494$, $s = 0,0411$

Źródło: opracowanie własne

Przykład B.3. Niech $\vec{A}$ będzie skierowaną liczbą rozmytą, odpowiadającą symetrycznej, gaussowskiej liczbie rozmytej o wartości przeciętnej a i odchyleniu standardowym s . Funkcja przynależności $\mu_A(x)$ ma postać

$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{s}\right)^2}.$$

Logarytmując stronami, otrzymujemy

$$\ln \mu_A(x) = - \frac{x-a}{s}^2.$$

Stąd mamy

$$\frac{x-a}{s} = \pm \sqrt{-\ln \mu_A(x)}.$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= u, \\ x(u) &= f(u), \quad \text{dla } x < a, \\ x(u) &= g(u), \quad \text{dla } x \geq a. \end{aligned}$$

Wówczas

$$f(u) - a = \pm s \sqrt{-\ln u}$$

oraz

$$f(u) = a \pm s \sqrt{-\ln u}.$$

Ponieważ z definicji funkcji $f(u)$ wynika warunek $f(u) < a$, więc musi być

$$f(u) = a - s\sqrt{-\ln u} \quad \text{dla } f(u) < a.$$

Analogicznie, dla funkcji g otrzymujemy

$$g(u) = a + s\sqrt{-\ln u} \quad \text{dla } g(u) \geq a.$$

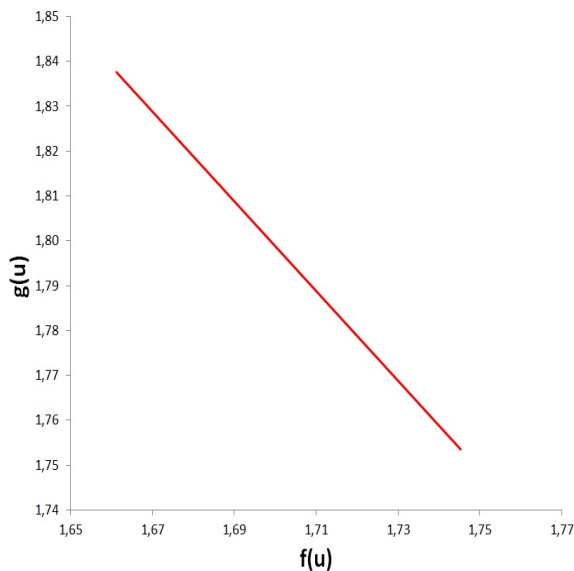
Podnosząc do kwadratu obie równości, a następnie dodając stronami, otrzymujemy

$$f^2(u) + g^2(u) = 2a^2 - 2s^2 \ln u.$$

Oznaczmy

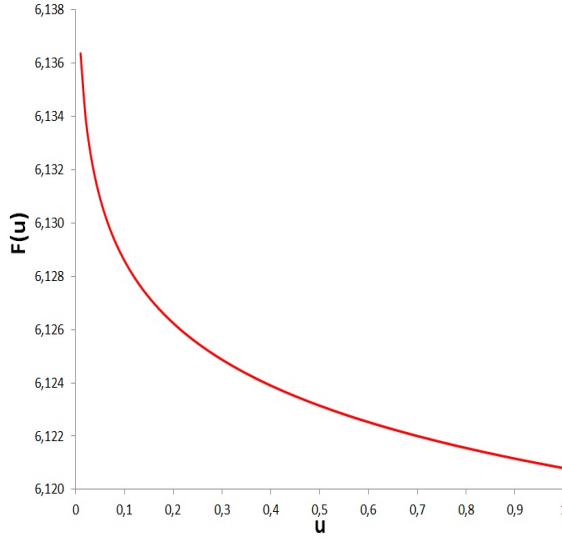
$$F(u) = |A(u)|^2 = 2a^2 - 2s^2 \ln u.$$

Do wyznaczenia normy elementu A potrzebujemy znaleźć maksimum funkcji $F(u)$. Niech $a = 1,7494$, $s = 0,0411$. Rysunek B.3 ilustruje funkcję zespoloną $(f(u), g(u))$, natomiast rysunek B.4 – funkcję $F(u)$.



Rys. B.3. Funkcja zespolona $(f(u), g(u))$ dla $a = 1,7494$, $s = 0,0411$

Źródło: opracowanie własne



Rys. B.4. Funkcja $F(u)$ dla $a = 1,7494$, $s = 0,0411$

Źródło: opracowanie własne

Przykład B.4. Niech $\vec{A}$ będzie skierowaną liczbą rozmytą, odpowiadającą niesymetrycznej, gaussowskiej liczbie rozmytej. Funkcja przynależności $\mu_A(x)$ ma postać

$$\mu_A(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-a}{s_L}\right)^2} & \text{dla } x < a, \\ e^{-\left(\frac{x-a}{s_R}\right)^2} & \text{dla } x \geq a. \end{cases}$$

Oznaczmy

$$\mu_A(x) = u,$$

$$x(u) = f(u), \quad \text{dla } x < a,$$

$$x(u) = g(u), \quad \text{dla } x \geq a.$$

Powtarzając sposób postępowania z przykładów B.1 i B.2, otrzymujemy

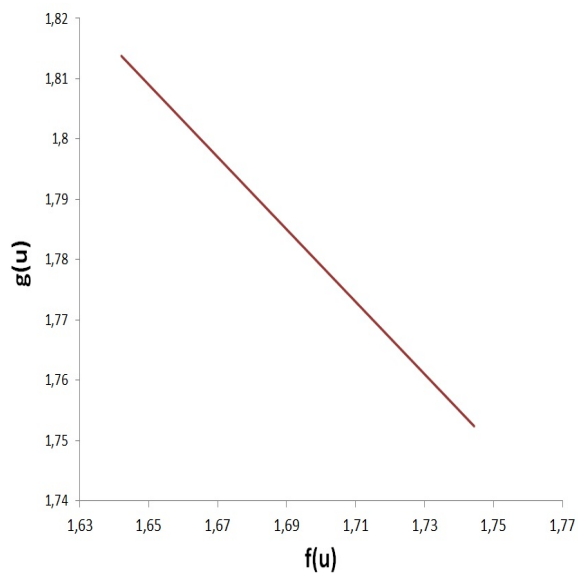
$$f(u) = a - s_L \sqrt{-\ln u} \quad \text{dla } f(u) < a,$$

$$g(u) = a + s_R \sqrt{-\ln u} \quad \text{dla } f(u) \geq a$$

oraz

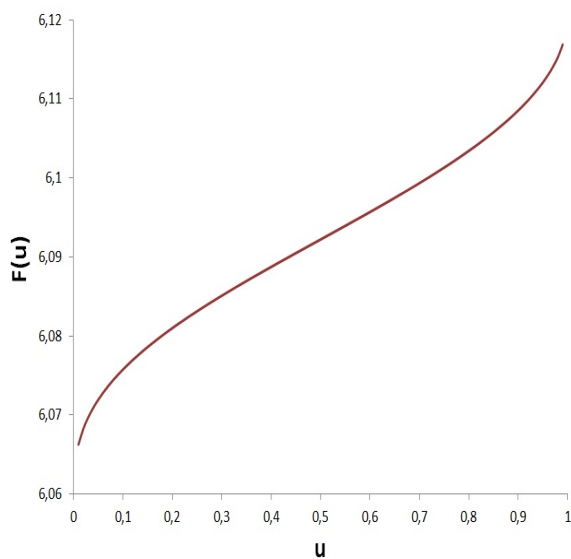
$$F(u) = 2a^2 + 2(s_R - s_L)\sqrt{-\ln u} - 2(s_R^2 + s_L^2) \ln u.$$

Rysunki B.5 i B.6 ilustrują wykresy odpowiednio funkcji zespolonej $(f(u), g(u))$ oraz funkcji $F(u)$ dla $a = 1,7494$, $s_L = 0,05$, $s_R = 0,03$.



Rys. B.5. Funkcja zespolona $(f(u), g(u))$ dla $a = 1,7494$, $s_L = 0,05$, $s_R = 0,03$

Źródło: opracowanie własne



Rys. B.6. Funkcja $F(u)$ dla $a = 1,7494$, $s_L = 0,05$, $s_R = 0,03$

Źródło: opracowanie własne

B.2.3. Przestrzeń kwaternionów

Definicja B.6. Kwaternionem nazywamy uporządkowaną parę liczb zespolonych $\tilde{A} = (\phi, \psi)$, spełniającą następujące aksjomaty

- (i) $(\phi, \psi) = (f, g) \Leftrightarrow \phi = f, \psi = g,$
- (ii) $(\phi, \psi) + (f, g) = (\phi + f, \psi + g),$
- (iii) $(\phi, \psi)(f, g) = (\phi f - \psi \bar{g}, \phi g + \psi \bar{f}),$
- (iv) $\alpha(\phi, \psi) = (\alpha\phi, \alpha\psi), \alpha \in \mathbf{R}.$

Niech $\mathbb{H}$ będzie przestrzenią kwaternionów. W przestrzeni tej przyjmujemy bazę składającą się z dwóch elementów 1 oraz j . Wtedy każdy kwaternion $\tilde{A} \in \mathbb{H}$ może być jednoznacznie przedstawiony w postaci

$$\tilde{A} = \phi + j\psi.$$

Oprócz tego, kwaternion może być przedstawiony w postaci sumy algebraicznej, w postaci macierzy zespolonej i w postaci macierzy rzeczywistej.

W przestrzeni kwaternionów $\mathbb{H}$ zdefiniowane są trzy operacje: dodawania kwaternionów, mnożenia przez liczby zespolone i mnożenia kwaternionów.

Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i dla każdego $\tilde{A} = \phi + j\psi$ z aksjomatu (iv) wynika

$$\alpha(\phi, \psi) = (\alpha\phi, \alpha\psi) = \alpha\phi + j\alpha\psi.$$

Dla $\phi, \psi \in \mathbb{C}$ postaci

$$\phi = a + ib, \psi = c + id,$$

dla każdego elementu $\tilde{A} \in \mathbb{H}$ możemy napisać

$$\tilde{A} = \phi + j\psi = (a + ib) + j(c + id) = a + ib + jc + ijd.$$

Przyjmując oznaczenie $k = ij$, otrzymujemy

$$\tilde{A} = a + ib + jc + kd.$$

W ten sposób para dwóch liczb zespolonych (ϕ, ψ) może być jednoznacznie zapisana w postaci

$$\tilde{A} = a + ib + jc + kd,$$

zwanej postacią sumy algebraicznej.

Mamy więc $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, czyli każdy kwaternion może być jednoznacznie wyznaczony przez cztery liczby a, b, c, d i stąd jego nazwa.

Mnożenie elementów bazy i, j, k w przestrzeni $\mathbb{H}$ może być przedstawione w postaci

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, ji = k, jk = i, kj = i, ki = j, ik = j.$$

Zgodnie z aksjomatem (iii), mnożenie dwóch kwaternionów $\tilde{A} = (\phi, \psi)$ oraz $\tilde{B} = (f, g)$ wyraża się wzorem

$$\tilde{A}\tilde{B} = (\phi, \psi)(f, g) = (\phi f - \psi \bar{g}, \phi g + \psi \bar{f}).$$

Niech $\tilde{A} = (i, 0)$ oraz $\tilde{B} = (0, 1)$. Wówczas mamy

$$\tilde{A}\tilde{B} = (i, 0)(0, 1) = (i \cdot 0 - 0 \cdot \bar{1}, i \cdot 1 + 0 \cdot \bar{0}) = (0, i)$$

$$\tilde{B}\tilde{A} = (0, 1)(i, 0) = (0 \cdot i - 1 \cdot \bar{0}, 0 \cdot 0 + 1 \cdot \bar{i}) = (0, -i),$$

czyli $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$, co oznacza, że mnożenie kwaternionów nie jest przemienne.

Definicja B.7. Dla dowolnego $\tilde{A} \in \mathbb{H}$ definiujemy kwaternion sprzężony

$$\tilde{A}^* = \phi - j\psi.$$

Wynika stąd, że operacja sprzężenia kwaternionów jest inwolucją w $\mathbb{H}$, czyli spełnia warunki

- (i) $(\tilde{A}^*)^* = \tilde{A}$, dla każdego $\tilde{A} \in \mathbb{H}$,
- (ii) $(\tilde{A}\tilde{B})^* = \tilde{B}^*\tilde{A}^*$, dla $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{H}$,
- (iii) $(\tilde{A} + \tilde{B})^* = \tilde{A}^* + \tilde{B}^*$,
- (iv) dla $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\tilde{A} \in \mathbb{H}$ zachodzi $(\lambda\tilde{A})^* = \lambda\tilde{A}^*$,
- (v) dla $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\tilde{A} \in \mathbb{H}$ zachodzi $(\lambda\tilde{A})^* = \tilde{A}^*\bar{\lambda}$.

Oprócz przedstawienia kwaternionu $\tilde{A} = (\phi, \psi)$, $\phi, \psi \in \mathbb{C}$ w postaci sumy algebraicznej, istnieje również przedstawienie w postaci macierzy zespolonej

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ -\bar{\psi} & \bar{\phi} \end{pmatrix}, \quad \phi, \psi \in \mathbb{C}.$$

Możemy wykazać izomorfizm pomiędzy przedstawieniem kwaternionów w postaci macierzy zespolonej a przedstawieniem w postaci sumy algebraicznej, jeżeli wprowadzimy bazę w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w postaci

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Wychodząc od postaci algebraicznej kwaternionu $\tilde{A}$ i wykorzystując własności operacji na macierzach i liczbach zespolonych, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} = \\
 &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bi & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & di \\ di & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c+di \\ -c+di & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \bar{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ -\bar{\psi} & \bar{\phi} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Sprzężenie dla kwaternionów przedstawianych w postaci macierzowej wyraża się jako

$$\overline{\begin{pmatrix} \phi & \psi \\ -\bar{\psi} & \bar{\phi} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{\phi} & -\psi \\ \bar{\psi} & \phi \end{pmatrix},$$

natomiast dla postaci sumy algebraicznej mamy

$$\tilde{\tilde{A}} = \overline{a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}} = a \cdot \mathbf{1} - b \cdot \mathbf{i} - c \cdot \mathbf{j} - d \cdot \mathbf{k},$$

a dla pary liczb zespolonych

$$(\overline{\phi, \psi}) = (\bar{\phi}, -\psi).$$

Sprzężenie oznaczać będziemy także gwiazdką, pisząc $\tilde{A}^*$ zamiast $\tilde{\tilde{A}}$.

Kwaternion jako macierz rzeczywista może być także przedstawiony w postaci

$$\begin{bmatrix} a & b & -d & -c \\ -b & a & -c & d \\ d & c & a & b \\ c & -d & -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Rozważmy ogólną postać macierzy zespolonej, reprezentującej dowolny kwaternion $\tilde{A} \in \mathbb{H}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ -\bar{\psi} & \bar{\phi} \end{pmatrix}.$$

Definicja B.8. Kwaternionem rozmytym nazywać będziemy kwaternion

$$\tilde{A}(u) = (\phi(u), \bar{\phi}(u)), \quad u \in [0, 1],$$

korespondujący z liczbą rozmytą A .

Funkcja zespolona $\phi(u)$ składa się z dwóch części: część rzeczywista opisuje wartość centralną liczby rozmytej, a część urojona odnosi się do jej funkcji przynależności.

Definicja B.9. Rozmytym kwaternionem triangularnym, symetrycznym nazywać będziemy kwaternion $\tilde{A}$, korespondujący z triangularną, symetryczną liczbą rozmytą $A = (a, s_A)$, gdzie a jest wartością centralną, a s_A jest rozpiętością liczby rozmytej¹⁰. Macierz zespolona rozmytego kwaternionu triangularnego i symetrycznego ma postać

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a - is_A(1-u) & a + is_A(1-u) \\ -a + is_A(1-u) & a + is_A(1-u) \end{pmatrix}.$$

Definicja B.10. Pierwiastek kwadratowy iloczynu kwaternionu $\tilde{A}$ przez swoje sprzężenie $\tilde{A}^*$, nazywany normą elementu $\tilde{A}$. Oznaczamy go symbolem $||\tilde{A}||$ i zapisujemy w postaci

$$||\tilde{A}||_{\mathbb{H}} = \overline{\tilde{A}\tilde{A}^*} = \overline{|\phi|^2 + |\psi|^2}. \quad (\text{B.2.1})$$

Funkcja kwaternionowa $\tilde{A}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ może być zapisana jako

$$\tilde{A}(u) = \begin{pmatrix} \phi(u) & \psi(u) \\ -\bar{\psi}(u) & \bar{\phi}(u) \end{pmatrix}, \quad \phi(u), \psi(u) \in \mathbb{C}, \quad u \in [0, 1]. \quad (\text{B.2.2})$$

Wykorzystując definicję wyznacznika dla zespolonej macierzy kwadratowej 2×2 , możemy zapisać

$$\begin{aligned} \det \tilde{A}(u) &= \det \begin{pmatrix} \phi(u) & \psi(u) \\ -\bar{\psi}(u) & \bar{\phi}(u) \end{pmatrix} = \\ &= \phi(u)\bar{\phi}(u) + \psi(u)\bar{\psi}(u) = |\phi(u)|^2 + |\psi(u)|^2 = \|\tilde{A}\|_{\mathbb{H}}^2, \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

a dla postaci sumy algebraicznej

$$\det \tilde{A} = \det(a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad (\text{B.2.4})$$

¹⁰ Por. rysunek 4.2 w rozdziale 4.

natomiast dla par liczb zespolonych jako

$$\det \tilde{A}(u) = \det(\phi(u), \psi(u)) = |\phi(u)|^2 + |\psi(u)|^2. \quad (\text{B.2.5})$$

Macierz dopełnień algebraicznych macierzy $\tilde{A}(u)$ ma postać

$$D(u) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}(u) & \bar{\psi}(u) \\ -\psi(u) & \phi(u) \end{pmatrix},$$

a po transpozycji

$$D^T(u) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}(u) & -\psi(u) \\ \bar{\psi}(u) & \phi(u) \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$\det \tilde{A}(u) = \|\tilde{A}(u)\|_{\mathbb{H}}^2,$$

więc macierz odwrotna $\tilde{A}^{-1}(u)$ wyraża się w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{-1}(u) &= \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\|_{\mathbb{H}}^2} \begin{pmatrix} \bar{\phi}(u) & -\psi(u) \\ \bar{\psi}(u) & \phi(u) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\|_{\mathbb{H}}^2} \overline{\begin{pmatrix} \phi(u) & \psi(u) \\ -\bar{\psi}(u) & \bar{\phi}(u) \end{pmatrix}} = \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\|_{\mathbb{H}}^2} \overline{\tilde{A}(u)}, \quad u \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

Pojęcie normy i sprzężenia kwaternionu umożliwia zdefiniowanie elementu odwrotnego do niezerowego kwaternionu $\tilde{A}$ w postaci

$$\tilde{A}^{-1}(u) = \frac{1}{\|\tilde{A}\|_{\mathbb{H}}^2} \overline{\tilde{A}(u)}, \quad u \in [0, 1] \quad (\text{B.2.7})$$

lub

$$\tilde{A}^{-1}(u) = \frac{1}{\|\tilde{A}\|_{\mathbb{H}}^2} \tilde{A}^*(u), \quad u \in [0, 1]. \quad (\text{B.2.8})$$

Element $\tilde{A}$ może mieć tylko jeden element odwrotny. Gdyby istniały dwa elementy odwrotne $\tilde{B}_1$ i $\tilde{B}_2$, to mielibyśmy

$$\tilde{B}_1 \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{B}_1 = \mathbb{I}$$

oraz

$$\tilde{B}_2 \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{B}_2 = \mathbb{I}.$$

Biorąc iloczyn $\tilde{B}_2 \tilde{B}_1 \tilde{A}$, mamy

$$\tilde{B}_2 \tilde{B}_1 \tilde{A} = \tilde{B}_2 \quad \tilde{B}_1 \tilde{A} = \tilde{B}_2 \mathbb{I} = \tilde{B}_2.$$

Z drugiej strony, ten sam iloczyn $\tilde{B}_2\tilde{B}_1\tilde{A}$ można przedstawić w postaci

$$\tilde{B}_2\tilde{B}_1\tilde{A} = \tilde{B}_2\tilde{A}\tilde{B}_1 = (\tilde{B}_2\tilde{A})\tilde{B}_1 = \mathbb{I}\tilde{B}_1 = \tilde{B}_1.$$

Wynika z tego, że musi być $\tilde{B}_2 = \tilde{B}_1$, czyli przestrzeń kwaternionów $\mathbb{H}$ ma tę własność, że każdy niezerowy kwaternion $\tilde{A}$ posiada tylko jeden element odwrotny. Nazywamy go elementem odwracalnym lub regularnym. Jest to równocześnie podstawowe założenie w twierdzeniu Gelfanda–Mazura.

Na mocy twierdzenia Gelfanda–Mazura algebra Banacha, w której każdy niezerowy element jest odwracalny, jest izometrycznie izomorficzna z algebrą Banacha liczb zespolonych. Algebra kwaternionów jest taką algebrą, w której każdy niezerowy element jest odwracalny.

Pokażemy teraz, że jeśli kwaterniony $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ są odwracalne, to odwracalny jest też iloczyn $\tilde{A}\tilde{B}$ i zachodzi

$$(\tilde{A}\tilde{B})^{-1} = \tilde{B}^{-1}\tilde{A}^{-1}. \quad (\text{B.2.9})$$

Rozważmy niezerowe kwaterniony $\tilde{A}(u)$ oraz $\tilde{B}(u)$, $u \in [0, 1]$. Oznaczmy

$$\tilde{C}^{-1}(u) = \tilde{A}(u)\tilde{B}(u)^{-1} = \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\|^2} \tilde{A}(u)\tilde{B}(u)^*. \quad (\text{B.2.10})$$

Algebra kwaternionów $\mathbb{H}$ jest algebrą C^* , więc zachodzi

$$(\tilde{A}(u)\tilde{B}(u))^* = \tilde{B}^*(u)\tilde{A}^*(u). \quad (\text{B.2.11})$$

Korzystając z definicji normy kwaternionu (B.2.1) oraz z (B.2.11), mamy

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\|^2 &= \|\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)^*\|^2 = \|\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\tilde{B}^*(u)\tilde{A}^*(u)\|^2 \\ &= \|\tilde{A}(u)\|\tilde{B}(u)\|^2\tilde{A}^*(u) = \|\tilde{A}(u)\tilde{A}^*(u)\|\tilde{B}(u)\|^2 = \|\tilde{A}(u)\|^2\|\tilde{B}(u)\|^2, \end{aligned}$$

czyli

$$\|\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\|^2 = \|\tilde{A}(u)\|^2\|\tilde{B}(u)\|^2. \quad (\text{B.2.12})$$

Zatem wykorzystując (B.2.11) i (B.2.12), możemy zapisać (B.2.10) w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{-1}(u) &= \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\|^2} \tilde{A}(u)\tilde{B}(u)^* = \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\|^2\|\tilde{B}(u)\|^2} \tilde{B}^*(u)\tilde{A}^*(u) = \\ &= \frac{1}{\|\tilde{B}(u)\|^2} \tilde{B}^*(u) \frac{1}{\|\tilde{A}(u)\|^2} \tilde{A}^*(u) = \tilde{B}^{-1}(u)\tilde{A}^{-1}(u), \end{aligned}$$

czyli

$$\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)^{-1} = \tilde{B}^{-1}(u)\tilde{A}^{-1}(u), \quad (\text{B.2.13})$$

co należało pokazać.

Definicja B.11. Przestrzenią unitarną $U(\mathbb{H})$ nazywać będziemy przestrzeń wektorową nad ciałem kwaternionów $\mathbb{H}$, w której określona jest forma

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \rightarrow \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle \in \mathbb{C}, \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{H},$$

spełniająca warunki

$$1^\circ. \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle = \overline{\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle},$$

$$2^\circ. \langle \tilde{A} + \tilde{B}, \tilde{C} \rangle = \langle \tilde{A}, \tilde{C} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle,$$

$$3^\circ. \langle a\tilde{A}, \tilde{B} \rangle = a\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle, \quad a \in \mathbb{C},$$

$$4^\circ. \langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle > 0 \text{ dla } \tilde{A} \neq \mathbb{O} \text{ oraz jeśli } \langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle = 0 \Rightarrow \tilde{A} = \mathbb{O}.$$

Liczbę zespoloną $\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle$ nazywamy wówczas iloczynem skalarnym elementów $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{H}$. Warunki $1^\circ - 4^\circ$ nazywają się aksjomatami iloczynu skalarnego ([60], s. 62).

Definicja B.10 określa pojęcie normy w przestrzeni $\mathbb{H}$. Skorzystamy z informacji podanej w książce Młaka [74] o tym, że iloczyn skalarny wyraża się za pomocą normy według formuły

$$\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle = \frac{1}{4} (\|\tilde{A} + \tilde{B}\|^2 + i\|\tilde{A} + i\tilde{B}\|^2 - \|\tilde{A} - \tilde{B}\|^2 - i\|\tilde{A} - i\tilde{B}\|^2), \quad (\text{B.2.14})$$

gdzie $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{H}$, natomiast $\mathbb{H}$ jest zespoloną przestrzenią kwaternionów.

Dla lepszego zrozumienia związku pomiędzy normą elementów przestrzeni $\mathbb{H}$ a iloczynem skalarnym, jaki indukuje norma przestrzeni $\mathbb{H}$ zwerifikujemy wzór (B.2.14).

Korzystając z aksjomatów iloczynu skalarnego, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \|\tilde{A} + \tilde{B}\|^2 &= \langle \tilde{A} + \tilde{B}, \tilde{A} + \tilde{B} \rangle = \langle \tilde{A}, \tilde{A} + \tilde{B} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{A} + \tilde{B} \rangle = \\ &= \langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle + \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{B} \rangle = \\ &= \|\tilde{A}\|^2 + \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + \|\tilde{B}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2.15})$$

Analogicznie mamy

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{A} - \tilde{B}\|^2 &= \langle \tilde{A} - \tilde{B}, \tilde{A} - \tilde{B} \rangle = \langle \tilde{A}, \tilde{A} - \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} - \tilde{B} \rangle = \\
 &= \langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle - \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{B} \rangle = \\
 &= \|\tilde{A}\|^2 - \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + \|\tilde{B}\|^2.
 \end{aligned} \tag{B.2.16}$$

Odejmując (B.2.16) od (B.2.15), otrzymujemy

$$\|\tilde{A} + \tilde{B}\|^2 - \|\tilde{A} - \tilde{B}\|^2 = 2\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle + 2\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle. \tag{B.2.17}$$

Podobnie postępujemy z pozostałymi wyrazami w (B.2.14). Mamy

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{A} + i\tilde{B}\|^2 &= \langle \tilde{A} + i\tilde{B}, \tilde{A} + i\tilde{B} \rangle = \langle \tilde{A}, \tilde{A} + i\tilde{B} \rangle + i\langle \tilde{B}, \tilde{A} + i\tilde{B} \rangle = \\
 &= \langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle + \langle \tilde{A}, i\tilde{B} \rangle + i\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + i\langle \tilde{B}, i\tilde{B} \rangle = \\
 &= \|\tilde{A}\|^2 + i\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle + i\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + i^2\|\tilde{B}\|^2.
 \end{aligned} \tag{B.2.18}$$

Mnożąc $\|\tilde{A} + i\tilde{B}\|$ przez i , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 i\|\tilde{A} + i\tilde{B}\|^2 &= i\|\tilde{A}\|^2 - ii\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle + ii\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + i\|\tilde{B}\|^2 = \\
 &= i\|\tilde{A}\|^2 + \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + i\|\tilde{B}\|^2.
 \end{aligned} \tag{B.2.19}$$

Po wstawieniu $-i$ zamiast i , mamy

$$-i\|\tilde{A} - i\tilde{B}\|^2 = -i\|\tilde{A}\|^2 + \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle - i\|\tilde{B}\|^2. \tag{B.2.20}$$

Sumując (B.2.19) oraz (B.2.20), dostajemy

$$\begin{aligned}
 i\|\tilde{A} + i\tilde{B}\|^2 - i\|\tilde{A} - i\tilde{B}\|^2 &= i\|\tilde{A}\|^2 + \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + i\|\tilde{B}\|^2 + \\
 &\quad -i\|\tilde{A}\|^2 + \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle - i\|\tilde{B}\|^2 = \\
 &= 2\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - 2\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle.
 \end{aligned} \tag{B.2.21}$$

Ostatecznie suma (B.2.17) oraz (B.2.21) prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} \|\tilde{A} + \tilde{B}\|^2 - \|\tilde{A} - \tilde{B}\|^2 + i\|\tilde{A} + i\tilde{B}\|^2 - i\|\tilde{A} - i\tilde{B}\|^2 = \\ = 2\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle + 2\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle + 2\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - 2\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle = 4\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle. \end{aligned} \tag{B.2.22}$$

Stąd otrzymujemy wyrażenie na iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej.

Bibliografia

- [1] Aalen O. O., (1978), *Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes*, Annals of Statistics, 6, 701–726.
- [2] Akushevich I., Akushevich L., Manton K., Yashin A., (2003), *Stochastic process model of mortality and aging: Application to longitudinal data*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 6, 515–523.
- [3] Alexiewicz A., (1969), *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa.
- [4] Antoch J., Hušková M., Janic A., Ledwina T., (2008), *Data driven rank test for the change point problem*, Metrika, Vol. 68 (1), 1–15.
- [5] Arnold B. C., (1983), *Pareto Distributions*, International Cooperative Publishing House, Fairland, Maryland.
- [6] Arnold B. C., Press S. J., (1989), *Bayesian Estimation and Prediction for Pareto Data*, Journal of the American Statistical Association, 84, 1079–1084.
- [7] Bain L. J., (1974), *Analysis for the Linear Failure-Rate Life-Testing Distribution*, Technometrics, 4, 551–559.
- [8] Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T., (2007), *Multiple regression with fuzzy data*, Fuzzy Sets and Systems, 158, 2169–2188.
- [9] Bayraktar E., Milevsky M. A., Promislow S. D., Young V. R., (2009), *Valuation of mortality risk via the instantaneous Sharpe ratio: Applications to life annuities*, Journal of Economics Dynamics and Control, 33, 676–691.
- [10] Bennett S., (1983), *Log-Logistic Regression Models for Survival Data*, Applied Statistics, 32, 165–171.
- [11] Biffis E., (2005), *Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations*, Insurance: Mathematics and Economics, 37, 443–468.
- [12] Biffis E., Denuit M., (2006), *Lee-Carter goes risk-neutral. An application to the Italian annuity market*, Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari, LXIX, 1–21.
- [13] Biffis E., Denuit M., Devolder P., (2010), *Stochastic mortality under measure changes*, Scandinavian Actuarial Journal, 4, 284–311.
- [14] Booth H., (2006), *Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review*, International Journal of Forecasting, 22, 547–581.
- [15] Boukas E. K., (2005), *Stochastic Hybrid Systems: Analysis and Design*, Birkhauser, Boston.

- [16] Bravo J. M., (2009), *Modelling mortality using multiple stochastic latent factors*, Proceedings of 7th International Workshop on Pension, Insurance and Saving, Paris, May 28–29, 1–15.
- [17] Bravo J. M., Braumann C. A., (2007), *The value of a random life: modelling survival probabilities in a stochastic environment*, Bulletin the the International Statistical Institute, LXII.
- [18] Brazauskas V., Serfling R., (2000), *Robust and Efficient Estimation of the Tail Index of a Single Parameter Pareto Distribution*, North American Actuarial Journal, 4, 12–27.
- [19] Brazauskas V., Serfling R., (2001), *Small Sample Performance of Robust Estimators of Tail Parameters For Pareto and Exponential Models*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 70, 1–19.
- [20] Brouhns N., Denuit M., Vermunt J. K., (2002), *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, Insurance: Mathematics and Economics, 31, 373–393.
- [21] Cairns A. J. G., Blake D., Dowd K., (2008), *Modelling and management of mortality risk: a review*, Scandinavian Actuarial Journal, 2–3, 79–113.
- [22] Cairns A. J. G., Blake D., Dowd K., Coughlan G. D., Epstein D., Ong A., Balevich I., (2007), *A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States*, Discussion Paper PI-0107, The Pensions Institute, Cass Business School City University.
- [23] Cairns A. J. G., Blake D., Dowd K., Coughlan G. D., Epstein D., Ong A., Balevich I., (2009), *A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States*, North American Actuarial Journal, 13, 1–35.
- [24] Cairns A. J. G., Blake D., Dowd K., Coughlan G. D., Epstein D., (2011), *Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models*, Insurance: Mathematics and Economics, 48, 355–367.
- [25] Chiang C. L., (1968), *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, John Wiley, New York.
- [26] Coelho E., Magalhaes M. G., Bravo J. M., (2010), *Mortality projections in Portugal*, Proceeding of the Conference of European Statisticians, Working Session on Demographic Projections, Lisbon, Portugal, EUROSTAT (Series Forecasting demographic components: mortality, April 28–30, 1–11.
- [27] Cox D. R., (1972), *Regression Models and Life-Tables*, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 34, 187–220.
- [28] Cox D. R., (1975), *Partial Likelihood*, Biometrika, 62, 269–276.
- [29] Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A., (1985), *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53, 385–407.

- [30] Dahl M., (2004), *Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts*, Insurance: Mathematics and Economics, 35, 113–136.
- [31] Debon A., Montes F., Puig F., (2008), *Modelling and forecasting mortality in Spain*, European Journal of Operational Research, 189, 624–637.
- [32] Diamond P., (1988), *Fuzzy least-squares*, Information Sciences, 46(3), 141–157.
- [33] DiCiccio T., (1987), *Approximate Inference for the Generalized Gamma Distribution*, Technometrics, 29, 33–40.
- [34] Dubois D., Prade H., (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco.
- [35] Feigl P., Zelen M., (1965), *Estimation of the Exponential Survival Probabilities with Concomitant Information*, Biometrics, 21, 826–838.
- [36] Frątczak E., (1997), *Analiza historii zdarzeń – elementy teorii, wybrane przykłady zastosowań z wykorzystaniem pakietu TDA*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
- [37] Giacometti R., Ortobelli S., Bertocchi M., (2011), *A stochastic model for mortality rate on Italian Data*, Journal of Optimization Theory and Applications, 149, 216–228.
- [38] Girosi F., King G., (2008), *Demographic Forecasting*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- [39] Glasser M., (1967), *Exponential Survival with Covariance*, Journal of the American Statistical Association, 62, 501–568.
- [40] Gompertz B., (1825), *On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining life contingencies*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, CXV, 513–580.
- [41] Haberman S., Renshaw A., (2008), *Mortality, longevity and experiments with the Lee–Carter model*, Lifetime Data Analysis, 14, 286–315.
- [42] Haberman S., Renshaw A., (2009), *On age-period-cohort parametric mortality rate projections*, Insurance: Mathematics and Economics, 45, 255–270.
- [43] Haberman S., Renshaw A., (2011), *A comparative study of parametric mortality projection models*, Insurance: Mathematics and Economics, 48, 3–55.
- [44] Hainaut D., (2012), *Multi dimensions Lee–Carter model with switching mortality processes*, Insurance: Mathematics and Economics, 47, 409–418.
- [45] Hainaut D., Devolder P., (2008), *Mortality modelling with Levy processes*, Insurance: Mathematics and Economics, 42, 409–418.
- [46] Harter H. L., (1967), *Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Four-Parameter Generalized Gamma Population from Complete and Censored Samples*, Technometrics, 9, 159–165.

- [47] Hatzopoulos P., Haberman S., (2011), *A dynamic parametrization modeling for the age-period-cohort mortality*, Insurance: Mathematics and Economics, 49, 155–174.
- [48] Heligman L., Pollard J. H., (1980), *The age pattern of mortality*, Journal of the Institute of Actuaries, 107, 49–80.
- [49] Hjorth U., (1980), *A Reliability Distribution with Increasing, Decreasing, Constant and Bathtub-Shaped Failure Rates*, Technometrics, 22, 99–107.
- [50] Hong H. D., (2001), *Shape preserving multiplications of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 123, 81–84.
- [51] Hong H. D., Song J. K., Do H. Y., (2001), *Fuzzy least-squares regression analysis using shape preserving operations*, Information Sciences, 138, 185–193.
- [52] Huffer F. W., McKeague I. W., (1991), *Weighted Least Squares Estimation for Aalen's Additive Risk Model*, Journal of the American Statistical Association, 86, 114–129.
- [53] Janic-Wróblewska A., Ledwina T., (2000), *Data driven rank test for two-sample problem*, Scandinavian Journal of Statistics, 27, 281–297.
- [54] Janssen J., Skiadas C. H., (1995), *Dynamic modelling of life table data*, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 11, 35–49.
- [55] Kaplan E. L., Meier P., (1958), *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations*, Journal of the American Statistical Association, 53, 457–481.
- [56] Kazakow I. E., Artemiev B. M., (1980), *Optimization of Dynamic Systems with Random Structure*, Nauka, Moscow (w j. rosyjskim).
- [57] Kędelski M., Paradysz J., (2006), *Demografia*, Wyd. AE, Poznań.
- [58] Kodlin D., (1967), *A New Response Time Distribution*, Biometrics, 2, 227–239.
- [59] Koissi M. C., Shapiro A. F., (2006), *Fuzzy formulation of the Lee–Carter model for mortality forecasting*, Insurance: Mathematics and Economics, 39, 287–309.
- [60] Kołodziej W., (1970), *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, Biblioteka Matematyczna, t. 36, PWN, Warszawa.
- [61] Kosiński W., Prokopowicz P., (2004), *Algebra liczb rozmytych*, Matematyka Stosowana, 46, 37–63.
- [62] Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2003), *Ordered fuzzy numbers*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences – Mathematics, 51, 327–338.
- [63] Krane S. A., (1963), *Analysis of Survival Data by Regression Techniques*, Technometrics, 5, 161–174.
- [64] Ladde G. S., Wu L., (2009), *Development of modified Geometric Brownian Motion model by using stock price data and basic statistics*, Nonlinear Analysis, 71, 1203–1208.

- [65] Lee R. D., Carter L., (1992), *Modeling and forecasting the time series of U.S. mortality*, Journal of the American Statistical Association, 87, 659–671.
- [66] Lee R. D., Miller T., (2001), *Evaluating the performance of the Lee–Carter method for forecasting mortality*, Demography, 38, 537–549.
- [67] Lin D. Y., (1991), *Goodness-of-Fit Analysis for the Cox Regression Model Based On a Class of Parameter Estimators*, Journal of the American Statistical Association, 86, 725–728.
- [68] Lipcer R., Szirajew A., (1981), *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa.
- [69] Luciano E., Spreeuw J., Vigna E., (2008), *Modelling stochastic mortality for dependents lives*, Insurance: Mathematics and Economics, 43, 234–244.
- [70] Malik H. J., (1970), *Estimation of the Parameters of the Pareto Distribution*, Metrika, 15, 126–132.
- [71] Malinowski M. T., (2012), *Strong solutions to stochastic fuzzy differential equations of Itô type*, Mathematics and Computer Modelling, 55, 918–928.
- [72] Maurin K., (1971), *Analiza, cz. I, Elementy*, PWN, Warszawa.
- [73] Milevsky M. A., Promislow S. D., (2001), *Mortality derivatives and the option annuities*, Insurance: Mathematics and Economics, 29, 299–318.
- [74] Mlak W., (1970), *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, PWN, Warszawa.
- [75] Nelson W., (1969), *Hazard Plotting for Incomplete Failure Data*, Journal of Quality Technology, 1, 27–52.
- [76] Nielsen B., Nielsen J. P., (2010), *Identification and Forecasting in the Lee–Carter Model*, Economics Series Working Papers No 2010-W07, University of Oxford, Department of Economics, dostęp on-line pod adresem: nuffield.ox.ac.uk/economics/papers/2010/w7/NielsenNielsenNew2010.pdf
- [77] Okólski M. (red.), (1990), *Determinanty umieralności w świetle teorii i badań empirycznych*, Wyd. SGPiS, Warszawa.
- [78] Okólski M., (2003), *Kryzys zdrowotny w Polsce*, Polityka Społeczna, nr 1.
- [79] Ostasiewicz S., (2011), *Aproksymacja czasu trwania życia w populacjach niejednorodnych*, Zeszyty Naukowe WSOWL, 4 (162), 342–358.
- [80] Pettitt A. N., (1984), *Proportional Odds Model for Survival Data and Estimates Using Ranks*, Applied Statistics, 33, 169–175.
- [81] Pitacco E., (2004), *Survival models in a dynamic context: a survey*, Insurance: Mathematics and Economics, 35, 279–298.
- [82] Plat R., (2009), *On stochastic mortality modeling*, Insurance: Mathematics and Economics, 45, 393–404.
- [83] Polovko A. M., (1968), *Fundamentals of Reliability Theory*, Academic Press, New York.
- [84] Prentice R. L., (1974), *A Log-Gamma Model and Its Maximum Likelihood Estimation*, Biometrika, 61, 539–544.

- [85] Preston S. H., Heuveline P., Guillot M., (2001), *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*, Blackwell Publishing Ltd., Malden–Oxford–Carlton.
- [86] Proschan F., (1963), *Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate*, *Technometrics*, 5, 375–385.
- [87] Quandt R. E., (1966), *Old and New Methods of Estimation and the Pareto Distribution*, *Metrika*, 10, 55–82.
- [88] Renshaw A., Haberman S., (2003), *Lee–Carter mortality forecasting with age-specific enhancement*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 255–272.
- [89] Renshaw A., Haberman S., (2003), *On the forecasting of mortality reduction factors*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 32, 379–401.
- [90] Renshaw A., Haberman S., (2006), *A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factor*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556–570.
- [91] Rossa A. (red.), (2011), *Analiza i modelowanie umieralności w ujęciu dynamicznym*, Wyd. UŁ, Łódź.
- [92] Rossa A., Socha L., (2013), *Proposition of Hybrid Stochastic Lee–Carter Mortality Model*, *Advances in Methodology and Statistics*, 10(1), 1–16.
- [93] Rosset E., (1979), *Trwanie życia ludzkiego*, PWN, Warszawa.
- [94] Russo V., Giacometti R., Ortobelli S., Rachev S., Fabozzi F. J., (2011), *Calibrating affine stochastic mortality models using term assurance premiums*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 49, 53–60.
- [95] Sakai S., (1971), *C^* -algebras and W^* -algebras*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- [96] Schrager D., (2006), *Affine stochastic mortality*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 81–97.
- [97] Sierpiński W., (1968), *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa.
- [98] Sobczyk K., (1996), *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa.
- [99] Socha L., (1993), *Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych*, PWN, Warszawa.
- [100] Socha L., (2008), *Linearization Methods for Stochastic Dynamic Systems*, Springer, Berlin.
- [101] Stacy E. W., (1962), *A Generalization of the Gamma Distribution*, *The Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1187–1192.
- [102] Stacy E. W., Mihram G. A., (1965), *Parameter Estimation for a Generalized Gamma Distribution*, *Technometrics*, 7, 349–358.
- [103] Stratonovich R., (1960), *A new form of representation of stochastic integral and equations*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 4, 362–371.

- [104] Szymański A., Rossa A. (2014), *Fuzzy mortality model based on Banach algebra*, International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics, 7(3), 241–265.
- [105] Tabeau E., Berg Jehs A., Heathcote Ch. (red.), (2001), *Forecasting Mortality in Developed Countries. Insights from Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*, Kluwer Academic Publishers, London.
- [106] Thiele T. N., (1872), *On a mathematical formula to express the rate of mortality throughout life*, Journal of the Institute of Actuaries, 16, 313–329.
- [107] Wachter K. W., (2006), *Essential Demographic Methods*, University of California Press, Berkeley.
- [108] Weibull W., (1939), *Statistical Theory of the Strength of Materials*, Ingenioor Vetenskps Akademiens Handlingar, 151, 1–45.
- [109] Wilmoth J. R., Horiuchi S., (1999), *Rectangularization revised: variability of age at death within human populations*, Demography, 36 (4), 475–495.
- [110] Wong E., (1971), *Stochastic Processes in Information Theory and Dynamical Systems*, McGraw–Hill, New York.
- [111] Wu S. J., (2003), *Estimation for the Two-Parameter Pareto Distribution under Progressive Censoring with Uniform Removals*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 73, 125–134.
- [112] Vasiček O., (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics, 5, 177–188.
- [113] Yin G., Zhang Q., Yang H., Yin K., (2002), *A class of hybrid market models: simulation, identification and estimation*, Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, May 8–10, 2571–2576.
- [114] Yin G., Zhang Q., Yang H., Yin K., (2003), *Constrained stochastic estimation algorithms for a class of hybrid stock market models*, Journal of Optimization Theory and Applications, 118, 157–182.
- [115] Zadeh L., (1965), *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8, 338–353.
- [116] Zippin C., Armitage P., (1966), *Use of Concomitant Variables and Incomplete Survival Information in the Estimation of an Exponential Survival Parameter*, Biometrics, 22, 665–672.
- [117] Żelazko W., (1968), *Algebry Banacha*, Biblioteka Matematyczna, t. 32, PWN, Warszawa.

W książce zaprezentowane są nowe modele umieralności, które umożliwiają prognozowanie procesu wymierania populacji w perspektywie średnio- i długookresowej. Autorzy omawiają kolejne modyfikacje modelu Lee-Cartera, wykorzystując teorię równań różniczkowych, algebry liczb rozmytych oraz algebry liczb zespolonych. Zastosowanie tych struktur pozwala na modelowanie umieralności, a następnie na wskazanie własności prognostycznych poszczególnych modeli. W sytuacji starzenia się społeczeństw w krajach rozwiniętych proponowane modele mogą znaleźć zastosowanie m.in. w planach emerytalnych i ubezpieczeniach na życie.

Książka dostępna również
jako e-book



WYDAWNICTWO
UNIwersYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

ISBN 978-83-8088-041-2



9 788380 880412